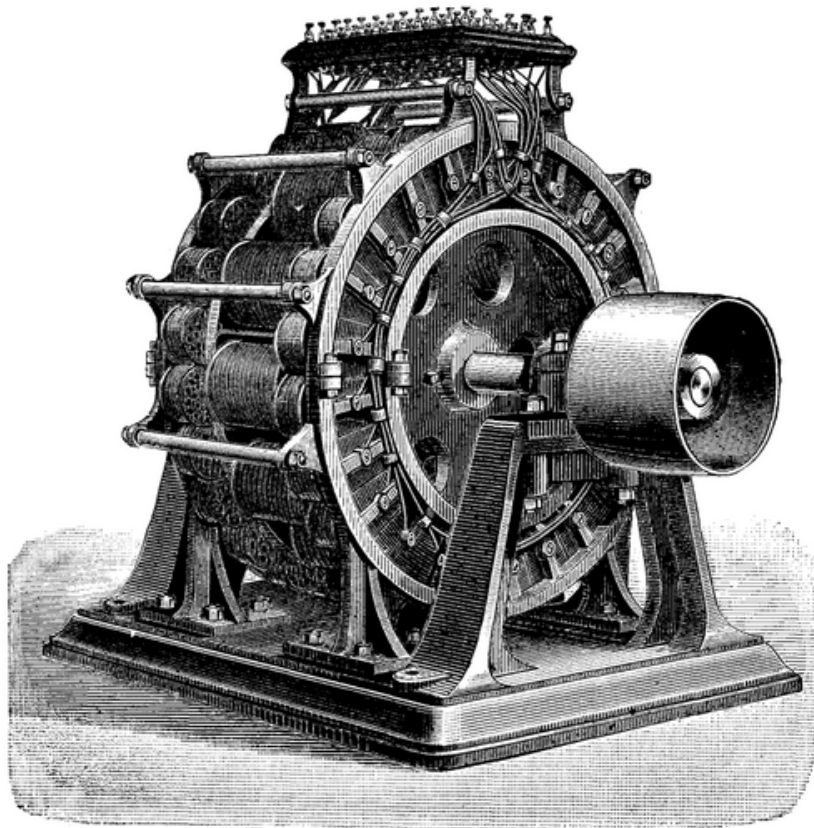


Macchine Elettriche



IMPORTANTE

Questi appunti non sono stati concepiti per essere sostitutivi né dei libri di testo, né tantomeno delle lezioni tenute dai professori.

Sono il mio strumento di preparazione all'esame, ma dato che nell'arco della mia carriera universitaria sono stati utili a varie colleghi ho deciso di renderli pubblicamente accessibili.

Per raggiungere la preparazione necessaria ad affrontare l'esame questi appunti non sono sufficienti: sono troppo sintetici ed essenziali.

Sono un valido strumento per prepararsi all'esame, non supporto di studio.

Alcune parti potrebbero essere incomplete o magari errate, sono pur sempre state scritte da uno studente. Per questo il libro di testo resta la fonte più affidabile e completa di informazioni.

Detto questo vi auguro un buono studio e in bocca al lupo per l'esame.

Emanuele "Laeman" Freddi

INDICE

Introduzione.....	4
1. Trasformatori Monofase.....	5
1.1 Generalità sui trasformatori	6
1.2 Deduzione del circuito elettrico equivalente.....	7
1.3 Calcolo della reattanza di dispersione.....	11
1.4 Caduta di tensione da vuoto a carico	15
1.5 Trasformatori in parallelo	17
1.6 Rendimento del trasformatore	19
1.7 Autotrasformatore	20
1.8 Trasformatore a tre avvolgimenti	22
2. Trasformatori Trifase.....	24
2.1 Collegamenti trifase.....	25
2.2 Armoniche di magnetizzazione	27
2.3 Inserzione di un trasformatore	29
2.4 Forze sugli avvolgimenti.....	32
2.5 Sovratensioni.....	34
2.6 Fenomeni termici.....	37
2.7 Effetto scala.....	39
3. Campo Magnetico Rotante	41
3.1 Campo magnetico rotante.....	42
3.2 Coefficienti di distribuzione e di passo	44
3.3 Considerazioni sulle armoniche.....	46
4. Macchina Asincrona	47
4.1 Generalità sulla macchina asincrona.....	48
4.2 Deduzione del circuito equivalente	49
4.3 Diagramma delle perdite.....	55
4.4 Calcolo della coppia elettromagnetica.....	56
4.5 Frenatura – funzionamento da generatore	59
4.6 Diagramma circolare del motore asincrono	60
4.7 Rotore a gabbia di scoiattolo	61
4.8 Avviamento della macchina	64
4.9 Motore asincrono monofase	70

5. Macchina Sincrona.....	73
5.1 Generalità sulla macchina sincrona.....	74
5.2 Deduzione del circuito equivalente – modello di Behn-Eschemburg.....	75
5.3 Condizioni di funzionamento tipiche.....	77
5.4 Manovra di parallelo.....	78
5.5 Calcolo della coppia elettromagnetica.....	81
5.6 Motore sincro.....	82
5.7 Limiti di funzionamento della macchina sincrona.....	83
5.8 Curve a “V”.....	84
5.9 Campi magnetici al traferro.....	85
5.10 Teoria di Potier.....	87
5.11 Reattanza sincra.....	89
5.12 Dispersione rotorica.....	90
5.13 Cenni di stabilità in transitorio.....	91
5.14 Macchina sincrona a poli salienti – teoria di Blondel.....	92
5.15 Campo di funzionamento della macchina sincrona a poli salienti.....	96
5.16 Calcolo della coppia nelle macchine sincrone a poli salienti.....	97
6. Macchina in Corrente Continua.....	99
6.1 Generalità sulla macchina in corrente continua.....	100
6.2 Deduzione del circuito equivalente.....	101
6.3 Calcolo della coppia elettromagnetica.....	103
6.4 Avvolgimenti embricati e ondulati.....	104
6.5 Reazione di armatura.....	105
6.6 Fenomeno della commutazione.....	107
6.7 Funzionamento da motore.....	110
Esercizi.....	114
Es. 1 – Motore asincro.....	114
Es. 2 – Motore asincro a doppia gabbia.....	115
Es. 3 – Motore asincro.....	116
Es. 4 – Generatore sincro.....	117

INTRODUZIONE

Qwerty

CAPITOLO 1

TRASFORMATORI MONOFASE

1.1 GENERALITÀ SUI TRASFORMATORI

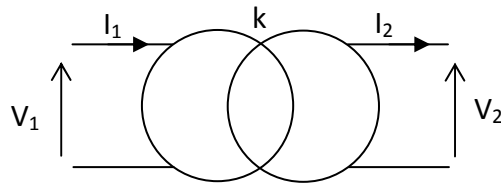
I trasformatori sono delle macchine elettriche statiche atte al trasferimento dell'energia tra due circuiti elettricamente separati per mezzo di un campo magnetico di accoppiamento.

La loro invenzione risale intorno al 1885, ed il loro funzionamento si basa sulla legge dell'induzione magnetica, anche nota come Legge di Faraday-Neumann-Lenz, secondo cui un conduttore immerso in un campo magnetico variabile è sede di una forza elettromotrice indotta.

I trasformatori trovano ampio impiego in applicazioni domestiche, quali l'alimentazione di apparati elettrici o elettronici, e industriali, quali la variazione dei livelli di tensione nelle reti. Vengono utilizzati anche in elettronica come trasformatori per alte frequenze o d'impulso, ed applicazioni atte alla misura di grandezze elettriche come i trasformatori di tensione e di corrente.

1.2 DEDUZIONE DEL CIRCUITO ELETTRICO EQUIVALENTE

Il componente principale del trasformatore è costituito dal cosiddetto trasformatore ideale.



Definito il rapporto di trasformazione ideale k , per questo doppio bipolo valgono le seguenti relazioni

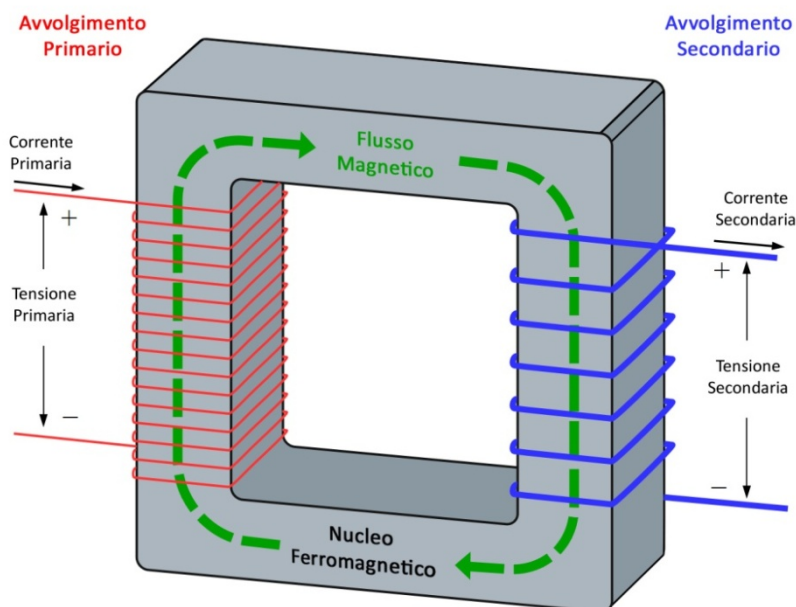
$$\begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = k \\ \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{1}{k} \end{cases}$$

Una diretta conseguenza di queste equazioni e della legge di Ohm, è la cosiddetta formula del trasporto di impedenza

$$\bar{Z}_1 = k^2 \bar{Z}_2$$

Un particolare tipo di trasformatore, utilizzato esclusivamente per garantire l'isolamento galvanico tra due circuiti, è, per l'appunto, il "trasformatore di isolamento", caratterizzato da $k=1$.

Il trasformatore reale, tuttavia, si discosta da quello ideale per via di una serie di imperfezioni costruttive e della non idealità dei materiali che lo costituiscono. Per analizzare tali imperfezioni è necessario considerare la configurazione reale dei trasformatori, che nella forma più semplice, è costituita da un nucleo ferromagnetico laminato e due avvolgimenti (bobine) in rame calettati sulle colonne del nucleo.



Il trasformatore reale si riduce al trasformatore ideale qualora siano presenti tali ipotesi:

- Resistività del rame nulla;
- Accoppiamento perfetto degli avvolgimenti (nessun flusso di dispersione);
- Permeabilità magnetica del ferro infinita;
- Conducibilità del ferro nulla.

Sotto tali ipotesi possiamo scrivere che la tensione applicata ai morsetti è pari alla tensione applicata sugli avvolgimenti, che è fissata una volta determinato il flusso. Da ciò si deduce che il rapporto di trasformazione k è pari a

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{E}_1 = N_1 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \\ \bar{V}_2 = \bar{E}_2 = N_2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \end{cases} \rightarrow k = \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

O, alternativamente

$$\underbrace{\mathcal{R}}_{=0} \bar{\Phi}_{\text{tot}} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 = N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2 = 0 \rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = k$$

Dove la riluttanza è nulla poiché è stata posta la permeabilità magnetica del ferro infinita.

Realmente le ipotesi di idealità non sono verificate e il circuito elettrico equivalente cambia. Si considera innanzitutto una permeabilità del circuito magnetico non infinita. Ammettendo che gli avvolgimenti siano accoppiati perfettamente, la presenza di una tensione sugli avvolgimenti comporta la presenza di un flusso magnetico nel nucleo, secondo la legge

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega N_1 \bar{\Phi}_{\text{tot}} \\ \bar{V}_2 = j\omega N_2 \bar{\Phi}_{\text{tot}} \end{cases}$$

Il flusso è altresì determinato come

$$N_1 \bar{I}_{1\mu} = \mathcal{R} \bar{\Phi}_{\text{tot}}$$

La $\bar{I}_{1\mu}$ è la **corrente di magnetizzazione** (al primario), che risulta non nulla nel momento in cui il materiale che compone il nucleo non è ideale e possiede riluttanza diversa da zero.

La presenza di un materiale ferromagnetico non ideale comporta anche la presenza di perdite per isteresi e correnti parassite (vedi cap. 2). Queste imperfezioni sono causa di perdite di potenza attiva. Ciò può essere rappresentato da una componente della corrente in fase con la tensione ai morsetti. Alla corrente di magnetizzazione si somma, quindi, un altro termine \bar{I}_{1P} per tener conto di queste perdite

$$\bar{I}_{10} = \bar{I}_{1\mu} + \bar{I}_{1P}$$

la risultante \bar{I}_{10} è detta **corrente a vuoto**.

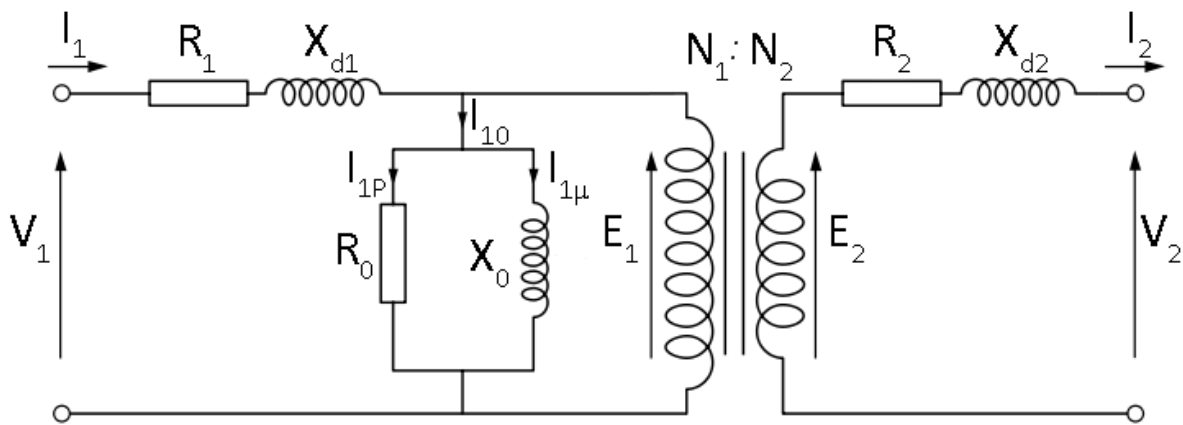
L'accoppiamento imperfetto tra gli avvolgimenti è causato da linee di flusso che escono dal nucleo e si richiudono in aria, concatenandosi con uno solo dei due avvolgimenti. Il flusso concatenato con gli avvolgimenti, quindi, non sarà più pari al flusso totale, ma una sua parte. Se ipotizziamo che ciascun flusso di dispersione (al primario e al secondario) si concateni completamente con il relativo avvolgimento, possiamo associare ai due flussi due induttanze di dispersione

$$L_{1d} = \frac{N_1 \bar{\Phi}_{1d}}{\bar{I}_1} ; \quad L_{2d} = \frac{N_2 \bar{\Phi}_{2d}}{\bar{I}_2}$$

A cui saranno associate le relative reattanze di dispersione X_{d1} e X_{d2} .

Infine, considerando le resistenze degli avvolgimenti non nulle, possiamo introdurre delle resistenze in serie alle due porte della macchina per tener conto delle perdite per effetto Joule.

Lo schema completo della macchina reale (monofase) diventa, pertanto, il seguente:



Le equazioni descrittive del circuito sono

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_{d1} \bar{I}_1 + \bar{E}_1 \\ \bar{V}_2 = R_2 \bar{I}_2 + j\omega L_{d2} \bar{I}_2 + \bar{E}_2 \\ \mathcal{R} \bar{\Phi}_{tot} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 = N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2 \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per k si ha che

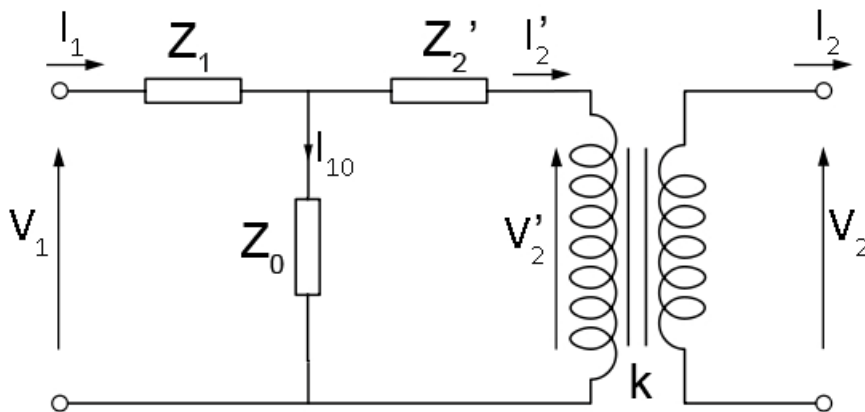
$$k \bar{V}_2 = (R_2 + jX_{d2}) \bar{I}_2 k + \underbrace{k \bar{E}_2}_{=\bar{E}_1}$$

Da cui

$$\bar{V}_2' = \underbrace{k^2 (R_2 + jX_{d2})}_{z_2'} \bar{I}_2' + \bar{E}_1$$

Dove l'apice sta ad indicare che la grandezza in questione è riportata (riferita) al primario.

In questo modo si ottiene il cosiddetto circuito equivalente “a T”:



A questo punto è possibile fare alcune considerazioni sui valori in per unità delle impedenze. Nel funzionamento a vuoto la $\bar{I}_2 = 0$. L'impedenza Z_0 è esprimibile, in per unità, come l'inverso della corrente a vuoto in per unità, quindi pari a

$$\dot{z}_0 = \frac{Z_0}{Z_{rif}} = \frac{I_{1n}}{I_0} = \frac{1}{i_0} \cong 100 \text{ p.u.}$$

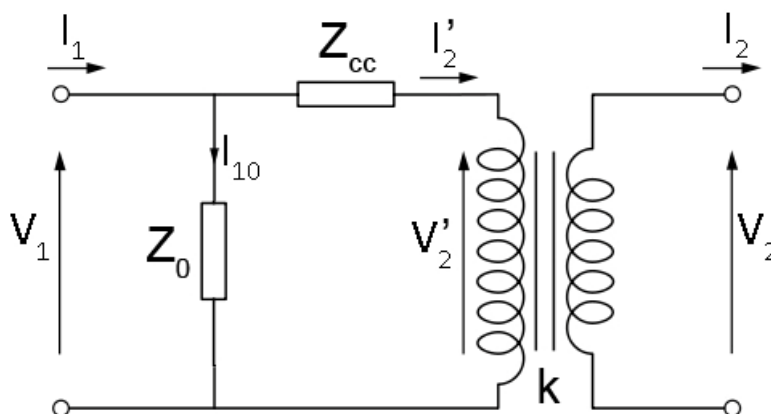
Nel funzionamento in corto circuito, invece, possiamo notare che la $\bar{V}_2 = 0$. Possiamo calcolare una Z_{cc} equivalente come la serie tra Z_1 con il parallelo tra Z_0 e Z_2' . La corrente di corto circuito è esprimibile in per unità come

$$i_{cc} = \frac{I_{1cc}}{I_{1n}} \frac{1}{|Z_{cc}|} = \frac{Z_{rif}}{Z_{cc}} = \frac{1}{\dot{z}_{cc}} \cong 10 \text{ p.u.}$$

Da cui la z_{cc}

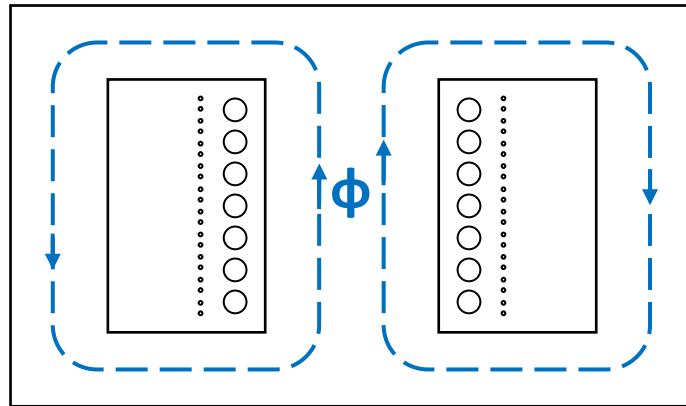
$$\dot{z}_{cc} \cong 0,1 \text{ p.u.}$$

In virtù del differente ordine di grandezza tra l'impedenza a vuoto e l'impedenza di corto circuito è possibile, commettendo solo un piccolo errore, shuntare la Z_0 all'ingresso, arrivando così al circuito equivalente “ad L”, il più facile da utilizzare nei calcoli:

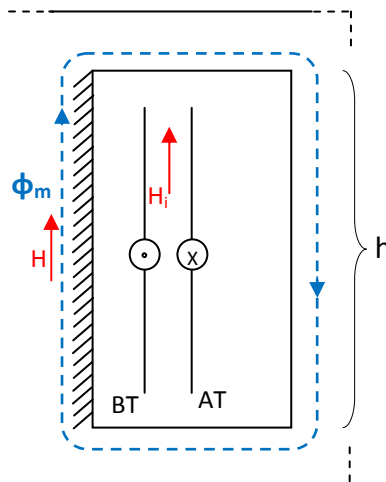


1.3 CALCOLO DELLA REATTANZA DI DISPERSIONE

Nel trasformatore reale, per via delle forze elettrodinamiche che si generano, gli avvolgimenti vengono disposti in modo concentrico, affinché gli sforzi relativi alle forze non deformino o spostino gli avvolgimenti stessi. Per motivi di isolamento, inoltre l'avvolgimento di bassa tensione viene sempre posto all'interno dell'avvolgimento di alta tensione, che, in questo modo, si trova più distante dalla colonna.



Possiamo calcolare la reattanza di dispersione X_d nell'ipotesi che la sezione degli avvolgimenti sia sufficientemente sottile da poter trascurare la variazione di campo elettromagnetico lungo la stessa (successivamente verrà rimossa tale ipotesi). Consideriamo il seguente schema relativo ad una condizione di funzionamento a vuoto:



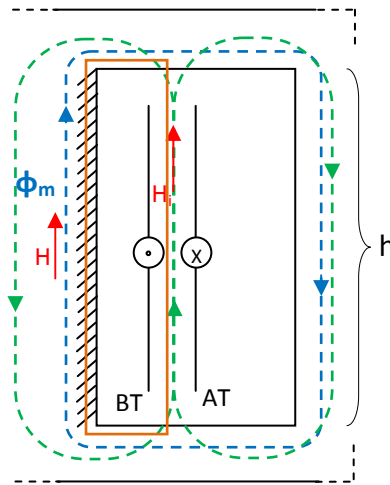
In questo caso il campo H_i tra gli interstizi si può trascurare. Possiamo scrivere l'energia a vuoto come

$$\frac{1}{2} L_0 I_0^2 \propto B_{max}$$

A vuoto, quindi, tutto il flusso si sviluppa nel ferro (linea blu) e non ci sono flussi di dispersione.

Nel momento in cui si chiude il trasformatore su di un carico, si genera una forza magnetomotrice opposta. Il campo negli interstizi non è più trascurabile. Si può infatti notare una similitudine tra la

geometria dell'intercapedine fra le bobine e un solenoide percorso da corrente. I versi delle correnti sono tali da creare un campo rilevante nell'interstizio:



Esiste quindi un campo di dispersione (linea verde) che non può essere trascurato, calcolabile come

$$\oint Hdl = N_2 I_2 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\int_{ferro} Hdl}_{\substack{\text{trascurabile} \\ (\mu_{ferro} \gg \mu_{aria})}} + \int_{aria} Hdl = N_2 I_2 \quad \rightarrow \quad Hh = N_2 I_2$$

Dove l'integrale di linea è sviluppato lungo il percorso arancione indicato in figura sovrastante. Da ciò segue che

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2 I_2}{h}$$

Ed essendo

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

Risulta anche che

$$B_1 = B_2 = B$$

Noto il valore di B è possibile esprimere una induttanza equivalente partendo da un bilancio energetico sul volume "a tubo" compreso tra le due bobine

$$\frac{1}{2} L_{cc} I_1^2 = \frac{1}{2} \iiint HBdV = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 \Delta \cdot P \cdot h = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mu_0^2 N_1^2 \frac{I_1^2}{h^2} \Delta \cdot P \cdot h$$

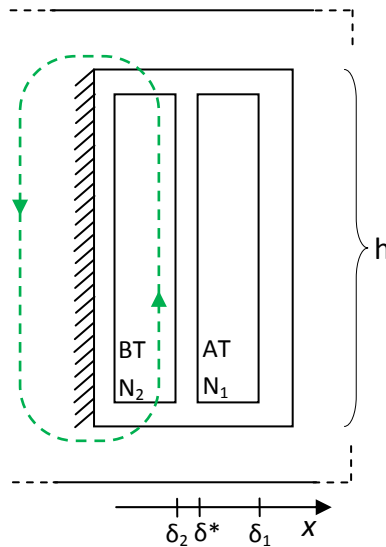
$$L_{cc} = \mu_0 \frac{N_1^2}{h} P \Delta$$

Dove P è il perimetro della circonferenza media tra le bobine mentre Δ è la distanza tra le bobine.

Lo stesso risultato si poteva ottenere in un modo più semplice osservando che

$$L_{cc} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} = \mu_0 \frac{N_1^2}{h} P \Delta$$

Nella realtà gli avvolgimenti non hanno mai una sezione tanto piccola da poter essere trascurata. L'ipotesi fatta all'inizio della trattazione, quindi, deve essere rimossa. Consideriamo uno schema della finestra del trasformatore siffatto, in cui le bobine vengono schematizzate con il loro spessore:



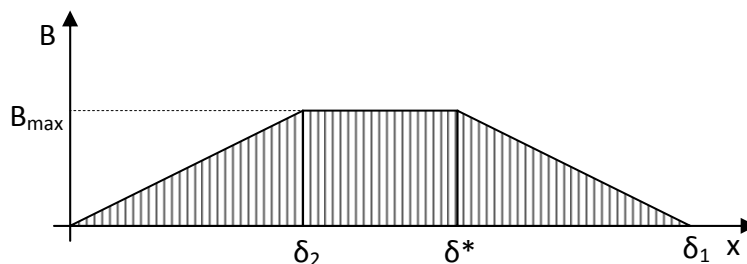
In queste condizioni esiste un campo (linea verde) che si richiude nelle spire. Si può pertanto scrivere

$$\oint H dl = \frac{x}{\delta_2} N_2 I_2$$

Da cui si deduce il campo B pari a

$$B = \frac{x}{\delta_2} B_{max}$$

Con riferimento al sistema di riferimento della figura sovrastante, quindi, si può ipotizzare un campo $B(x)$ che segue un andamento tipo:



A questo punto si può ricalcolare la L_{cc} come è stato fatto in precedenza, spezzando l'integrale di volume in tre parti, una per ogni tratto del grafico. Per il tratto centrale (II), in cui la B è costante,

valgono gli stessi ragionamenti già fatti in precedenza. Per il primo tratto (I), in cui la B cresce linearmente con la x , possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2} L_{cc} I_1^2 = \frac{1}{2} \iiint \frac{B^2}{\mu_0} dv = \frac{1}{2} \frac{B_{max}^2}{\mu_0} hp \int_0^{\delta_2} \left(\frac{x}{\delta_2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{B_{max}^2}{\mu_0} hp \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{\delta_2^2} \right]_0^{\delta_2} = \frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{N_2^2 I_2^2}{\mu_0 h^2} \frac{hp \delta_2}{3}$$

Dove con p si intende il perimetro (la circonferenza) delle bobine. Semplificando (e considerando che $N_2 I_2 = N_1 I_1$) si ottiene:

$$L_{cc} = \mu_0 N_1^2 \frac{p \delta_2}{h \cdot 3}$$

Per quanto riguarda il terzo tratto (III) si può procedere analogamente a quanto già effettuato per il primo tratto. In definitiva, la L_{cc} sarà la somma dei risultati ottenuti:

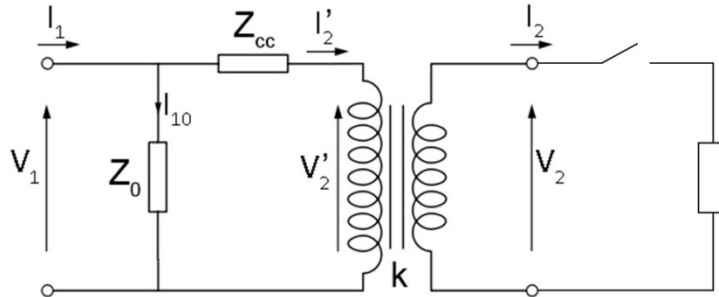
$$L_{cc} = \mu_0 N_1^2 \frac{p}{h} \Delta + \mu_0 N_1^2 \frac{p \delta_1}{h \cdot 3} + \mu_0 N_1^2 \frac{p \delta_2}{h \cdot 3}$$

Ovvero

$$L_{cc} = \mu_0 \frac{p}{h} N_1^2 \left(\frac{\delta_1}{3} + \Delta + \frac{\delta_2}{3} \right)$$

1.4 CADUTA DI TENSIONE DA VUOTO A CARICO

Consideriamo un circuito siffatto, con un trasformatore alimentato al primario, che al secondario si chiude su un carico per mezzo di un interruttore:



Si vuole calcolare la caduta di tensione al secondario dalla condizione di funzionamento a vuoto \bar{V}_{20} , alla condizione di funzionamento sotto carico \bar{V}_2 . Questa c.d.t. è definita come

$$\Delta V = \frac{|\bar{V}_{20}| - |\bar{V}_2|}{|\bar{V}_{20}|}$$

Moltiplicando l'equazione precedente per k/k otteniamo

$$\Delta V = \frac{|\bar{V}_{20}| - |\bar{V}_2| k}{|\bar{V}_{20}| k} = \frac{|\bar{V}_1| - |\bar{V}'_2|}{|\bar{V}_1|}$$

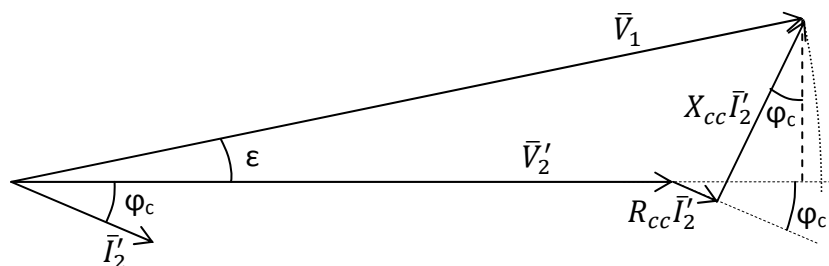
Secondo la LKT è possibile altresì scrivere

$$\bar{V}'_2 = \bar{V}_1 - \bar{Z}_{cc} \bar{I}'_2$$

Perciò, in definitiva si ha che

$$\Delta V = \frac{|\bar{Z}_{cc} \bar{I}'_2|}{|\bar{V}_1|}$$

L'impedenza di corto circuito è data dalla somma della resistenza di corto circuito e della reattanza di corto circuito. In un diagramma fasoriale a carico si possono rappresentare graficamente i contributi della c.d.t. sia della resistenza che della reattanza.



L'angolo ϵ è circa pari a zero, quindi si può sostituire l'arco (puntinato in figura) con la proiezione (tratteggiata in figura). Così facendo la caduta di tensione diventa esprimibile come

$$\Delta V = \frac{R_{cc}\bar{I}'_2 \cos \varphi_c + X_{cc}\bar{I}'_2 \sin \varphi_c}{|\bar{V}_1|}$$

Introducendo il fattore di carico $\alpha = \frac{I_1}{I_{1n}}$, l'equazione diventa

$$\Delta V = \frac{R_{cc}\alpha I_{1n} \cos \varphi_c + X_{cc}\alpha I_{1n} \sin \varphi_c}{|\bar{V}_1|}$$

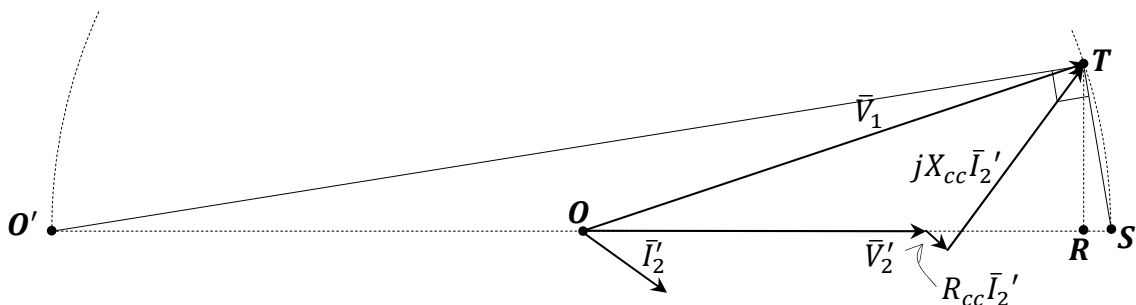
Ma, dato che

$$R_{cc} \frac{I_{1n}}{V_1} = \frac{R_{cc}}{Z_{base}} = \dot{r}_{cc} \qquad X_{cc} \frac{I_{1n}}{V_1} = \frac{X_{cc}}{Z_{base}} = \dot{x}_{cc}$$

Si ha che

$$\Delta V = \alpha \dot{r}_{cc} \cos \varphi_c + \alpha \dot{x}_{cc} \sin \varphi_c$$

Per rendere più accurato il calcolo della c.d.t. le norme CEI riportano una procedura per tener conto dell'errore introdotto nel confondere l'arco con la proiezione. Si realizza un diagramma fasoriale siffatto:



Considerando il triangolo rettangolo $O'\hat{T}R$, per il teorema di Euclide si può scrivere:

$$(\overline{TR})^2 = \overline{O'R} \cdot \overline{RS}$$

Dove

$$\overline{O'R} \approx 2\overline{OS} = 2V_1$$

e

$$\overline{TR} = X_{cc}\bar{I}'_2 \cos \varphi_c - R_{cc}\bar{I}'_2 \sin \varphi_c$$

Quindi,aggiungendo \overline{RS} all'equazione precedentemente trovata la ΔV diventa

$$\Delta V = \alpha r_{cc} \cos \varphi_c + \alpha x_{cc} \sin \varphi_c + \frac{1}{2} \underbrace{(\alpha x_{cc} \cos \varphi_c - \alpha r_{cc} \sin \varphi_c)^2}_{\overline{RS}}$$

1.5 TRASFORMATORI IN PARALLELO

Può accadere che, per esigenze di potenza (ad esempio a seguito di un ampliamento di una fabbrica) o per esigenze di continuità di servizio e ridondanza, due trasformatori debbano essere posti in parallelo per alimentare un carico. L'operazione può essere effettuata anche con macchine di diversa taglia, a patto di rispettare alcuni vincoli:

- 1) Quando la linea di utilizzazione è a vuoto, anche i due trasformatori devono essere a vuoto
- 2) Il carico si deve suddividere equamente sui due trasformatori in funzione delle potenze degli stessi.

La prima condizione si rispecchia semplicemente sulla condizione che i due trasformatori A e B devono avere ugual rapporto di trasformazione

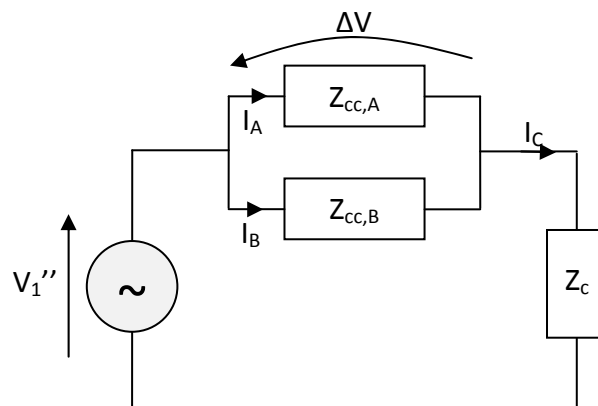
$$k_A = k_B$$

In questo modo, sulla maglia costituita dai secondari dei trasformatori, quando la linea è a vuoto, le forze elettromotrici impresse sulle bobine secondarie dei trasformatori si elidono a vicenda. È importante notare come il rapporto di trasformazione dei trasformatori è dato sempre con una certa tolleranza, dovuta al numero di spire reali che il trasformatore conta. Quando si devono utilizzare due trasformatori in parallelo è importante che la differenza (a volte inevitabile) di tensione secondaria a vuoto dei trasformatori sia la più piccola possibile, in modo da garantire correnti di circolazione molto piccole se non nulle. Le norme indicano come valore ammissibile per l'errore sul K, un massimo dello 0,5%. Per i trasformatori trifase, è anche necessario che questi appartengano al medesimo gruppo (vedi §2.1).

La seconda condizione si traduce nell'obiettivo di avere i coefficienti di carico dei due trasformatori uguali

$$\alpha_A = \alpha_B$$

Posti i due rapporti di trasformazione di A e B uguali, si può utilizzare, sotto carico, il seguente circuito equivalente:



È evidente che vale

$$\Delta V = \bar{Z}_{ccA} \bar{I}_A = \bar{Z}_{ccB} \bar{I}_B$$

In prima approssimazione si può scrivere

$$\begin{cases} \bar{Z}_{ccA} \approx jX_{ccA} \\ \bar{Z}_{ccB} \approx jX_{ccB} \end{cases} \rightarrow \Delta V = jX_{ccA} \bar{I}_A = jX_{ccB} \bar{I}_B$$

Quindi

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{X_{ccB}}{X_{ccA}}$$

Dato che

$$\alpha_A = \frac{I_A}{I_{An}} = \frac{I_B}{I_{Bn}} = \alpha_B \quad \rightarrow \quad \frac{I_{An}}{I_{Bn}} = \frac{I_A}{I_B}$$

Si può scrivere

$$X_{ccA} I_{An} = X_{ccB} I_{Bn}$$

Che sono proprio le espressioni delle tensioni di corto circuito di A e B. Quindi

$$V_{ccA} = V_{ccB}$$

Nel caso più realistico in cui l'impedenza di corto circuito non sia approssimabile con la sola reattanza, si può reiterare il ragionamento arrivando ad una espressione tipo

$$\bar{Z}_{ccA} I_{An} = \bar{Z}_{ccB} I_{Bn}$$

Che per essere soddisfatta richiede che le tensioni di corto circuito siano uguali sia in modulo che in fase, ossia che

$$\varphi_{ccA} = \varphi_{ccB}$$

Pertanto la condizione di funzionamento in parallelo di due trasformatori monofase richiede che essi abbiano il medesimo rapporto di trasformazione e gli stessi triangoli di cortocircuito.

1.6 RENDIMENTO DEL TRASFORMATORE

In esercizio, il trasformatore è sede di perdite. Si può quindi assegnare ad esso un rendimento:

$$\eta_{\%} = \frac{P_{out}}{P_{in}} \cdot 100 = \frac{P_{out}}{P_{out} + P_{diss}} \cdot 100$$

Le perdite di potenza attiva della macchina sono divise in perdite nel ferro e perdite nel rame

$$P_{diss} = P_{fe} + P_{cu}$$

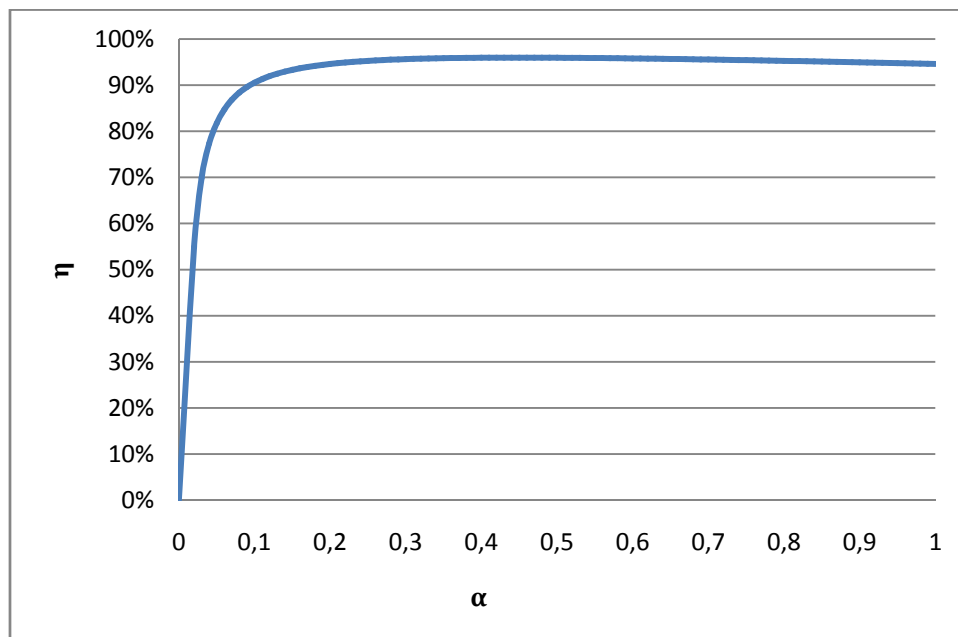
Si può quindi scrivere

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{out} + P_{fe} + P_{cu}} = 1 - \frac{P_{fe} + P_{cu}}{P_{in}} = 1 - \frac{V_1^2 G_0 + R_{cc} I_1^2}{V_1 I_1 \cos \varphi}$$

Tale espressione si può efficacemente esprimere in funzione di α , come

$$\eta = 1 - \frac{P_0 + \alpha^2 P_{cc}}{\alpha P_n \cos \varphi} \xrightarrow{p.u.} 1 - \frac{p_0 + \alpha^2 p_{cc}}{\alpha \cos \varphi}$$

È possibile tracciare un grafico del rendimento in funzione del coefficiente di carico (per un determinato fattore di potenza), come il seguente:



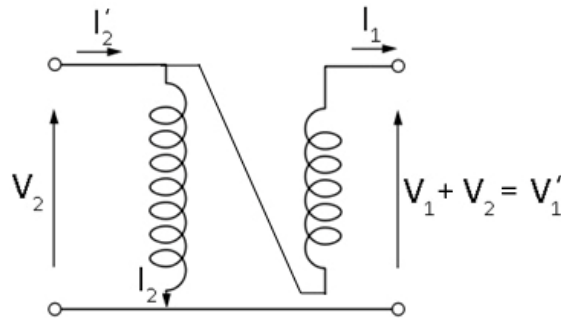
Il punto di massimo rendimento η_{max} corrisponde ad un α_{max} pari a

$$\alpha_{max} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}}$$

Questo punto di massimo rendimento giace, solitamente, intorno ad $\alpha=50\%$. Questo è voluto perché la zona centrale del diagramma è la zona in cui il trasformatore lavora maggiormente.

1.7 AUTOTRASFORMATORE

Un particolare tipo di trasformatore è l'autotrasformatore. Questa macchina non realizza l'isolamento galvanico tra primario e secondario. Tuttavia ha alcuni vantaggi rispetto ad un trasformatore tradizionale. La sua realizzazione si può pensare effettuata a partire da un normale trasformatore in cui gli avvolgimenti primario e secondario siano uniti, come in figura:



Il primo effetto di questa modifica è l'innalzamento del rapporto di trasformazione. Infatti, se prima il rapporto di trasformazione era pari a

$$k = \frac{V_1}{V_2}$$

Ora il rapporto di trasformazione è pari a

$$k' = \frac{V_1'}{V_2} = \frac{V_1 + V_2}{V_2} = k + 1$$

Anche la potenza subisce un miglioramento. Indicando con i pedici a e t, rispettivamente l'autotrasformatore e il trasformatore da cui è "ricavato", si ha che:

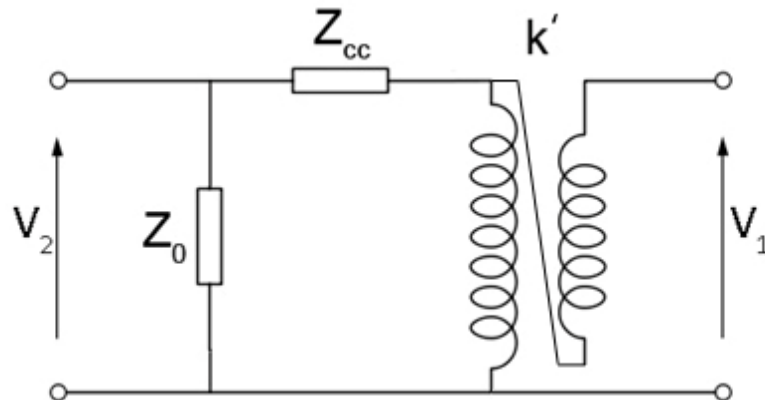
$$P_{1a} = I_{1n}(V_1 + V_2) = I_{1n}V_1 \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) = P_{nt} \left(1 + \frac{1}{k_t}\right)$$

$$P_{2a} = V_2 I_2' = V_2(I_{2t} + I_1) = V_2 I_{2t} \left(1 + \frac{I_1}{I_{2t}}\right) = P_{nt} \left(1 + \frac{1}{k_t}\right)$$

La potenza erogabile, quindi, aumenta di $\frac{1}{k_t}$ volte.

Il maggior impiego di questa macchina è interconnessione delle reti AAT con le reti AT. In queste linee, i livelli di tensioni sono in rapporti inferiori a 4, pertanto il coefficiente di trasformazione è basso e ciò consente di avere delle potenze notevolmente superiori, a parità di dimensioni.

Per lo studio degli autotrasformatori si ricorre ad un circuito equivalente del tutto analogo a quello dei trasformatori:



Vediamo come variano le correnti a vuoto e in corto circuito:

	Trasformatore	Autotrasformatore
i_0^*	$i_{0t}^* = \frac{I_0}{I_{2n}}$	$i_{0a}^* = \frac{I_0}{I_{2n} + I_{1n}} = \frac{i_{0t}^*}{1 + \frac{1}{k_t}}$
I_{cc}	$I_{cc_t} = \frac{V_1}{Z_{cc_t}}$	$I_{cc_a} = \frac{V_1'}{Z_{cc_t}} = \frac{V_{1n} + V_{2n}}{Z_{cc_t}} = I_{cc_t} \left(1 + \frac{1}{k_t}\right)$

Quindi è evidente che:

$$i_{0t}^* > i_{0a}^*$$

$$I_{cc_t} < I_{cc_a}$$

Ciò vuol dire che l'impiego di un autotrasformatore consente di ridurre le perdite, in quanto la corrente a vuoto è inferiore, a scapito di una corrente di corto circuito maggiore, che quindi comporta una spesa maggiore nelle protezioni. Riassumendo, l'autotrasformatore presenta le seguenti caratteristiche:

Pro:

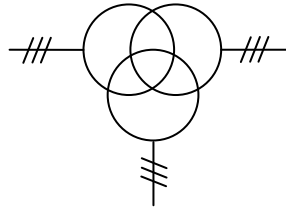
- Maggiore potenza specifica (a parità di volume la potenza elaborata è maggiore)
- Perdite ridotte

Contro:

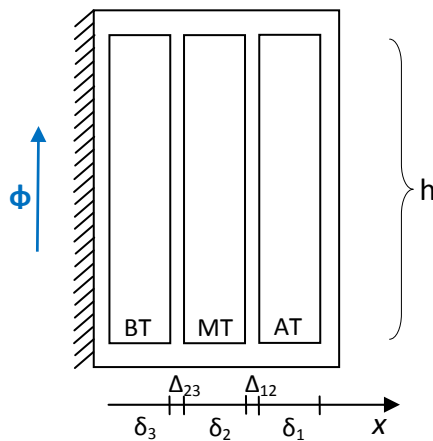
- Nessun isolamento galvanico
- Corrente di corto circuito maggiore

1.8 TRASFORMATORE A TRE AVVOLGIMENTI

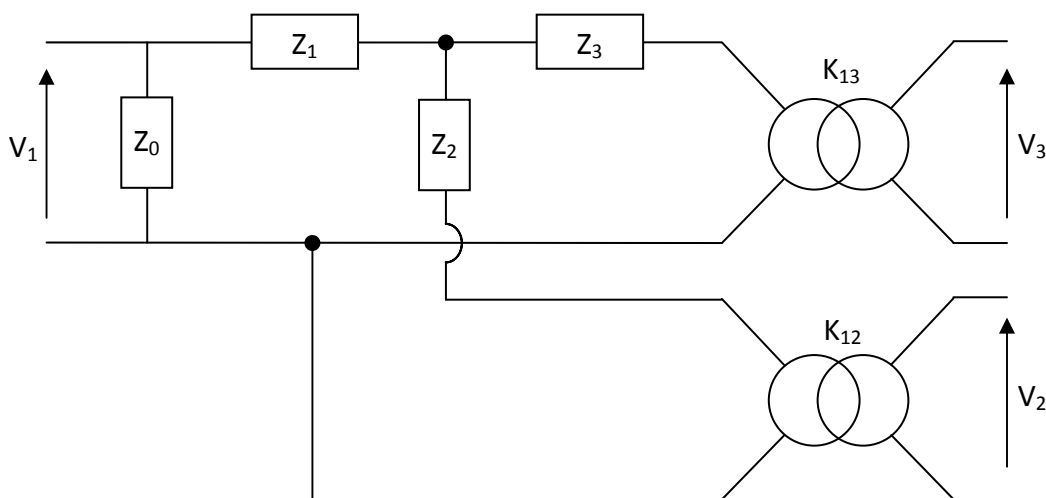
Un altro particolare tipo di macchina è il trasformatore a tre avvolgimenti. Questa macchina è viene rappresentata con il seguente simbolo:



È caratterizzato da tre rapporti di trasformazione, ed è utilizzata in tutti quei punti della rete in cui è necessario avere una terza uscita (a tensione tipicamente inferiore, un caso comune è un trasformatore AAT/AT/MT) e non si vuole ricorrere ad un secondo trasformatore. La macchina costituisce un triplo bipolo. Costruttivamente la sezione di finestra si presenta come:



Il loro studio avviene attraverso un circuito equivalente particolare, che tiene conto che la macchina è divenuta un triplo bipolo:



Rispetto ad un trasformatore classico, quindi, si presenta il problema di determinare le impedenze Z_1 , Z_2 e Z_3 . Per far ciò ipotizziamo tre possibili situazioni di funzionamento della macchina, al fine di ricavare un set di tre equazioni che ci permettano di determinare le tre incognite.

- 1) Avvolgimento terziario a vuoto, secondario in cto cto, primario a tensione nominale
- 2) Avvolgimento secondario a vuoto, terziario in cto cto, primario a tensione nominale
- 3) Avvolgimento primario a vuoto, terziario in cto cto, secondario a tensione nominale

Nel primo caso possiamo scrivere:

$$Z_{cc,12} = (R_1 + R'_2) + j\omega\mu_0 \frac{(N_1^2 p)}{h} \left(\frac{\delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\delta_2}{3} \right) = Z_1 + Z_2$$

Nel secondo caso, invece:

$$Z_{cc,13} = (R_1 + R'_3) + j\omega\mu_0 \frac{(N_1^2 p)}{h} \left(\frac{\delta_1}{3} + \Delta_{12} + \delta_2 + \Delta_{23} + \frac{\delta_3}{3} \right) = Z_1 + Z_3$$

Nel terzo caso, infine:

$$Z_{cc,23} = (R'_2 + R'_3) + j\omega\mu_0 \frac{(N_1^2 p)}{h} \left(\frac{\delta_2}{3} + \Delta_{23} + \frac{\delta_3}{3} \right) = Z_2 + Z_3$$

Possiamo a questo punto scrivere un sistema 3x3:

$$\begin{cases} Z_{cc,12} = Z_1 + Z_2 \\ Z_{cc,23} = Z_2 + Z_3 \\ Z_{cc,13} = Z_1 + Z_3 \end{cases}$$

La cui soluzione è:

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{1}{2} (Z_{cc,12} + Z_{cc,13} - Z_{cc,23}) = R_1 + jK \left(\frac{\delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\delta_2}{2} \right) \\ Z_2 = \frac{1}{2} (Z_{cc,23} + Z_{cc,12} - Z_{cc,13}) = R'_2 - jK \frac{\delta_2}{6} \\ Z_3 = \frac{1}{2} (Z_{cc,13} + Z_{cc,23} - Z_{cc,12}) = R'_3 + jK \left(\frac{\delta_3}{3} + \Delta_{23} + \frac{\delta_2}{2} \right) \end{cases} \quad \text{con } K = \omega \frac{N_1^2 p}{h} \mu_0$$

si può notare che la reattanza X_2 è negativa. Ciò è naturalmente anomalo, ma non errato, in quanto la reattanza non è mai presa da sola, ma sempre in coppia con un'altra (e quindi la cui somma è sicuramente positiva). Il centro stella dello schema, infatti, non è accessibile. Lo schema è solo un equivalente elettrico e non ha un corrispettivo nella realtà. La quasi totalità dei trasformatori di potenza è a tre avvolgimenti. Il terzo avvolgimento, tipicamente di dimensioni assai ridotte rispetto agli altri due, è dotato di svariate prese, utilizzate per la regolazione della tensione (lato AT), per seguire le variazioni lente di carico.

CAPITOLO 2

TRASFORMATORI TRIFASE

2.1 COLLEGAMENTI TRIFASE

Il trasformatore trifase è essenzialmente costituito da tre trasformatori monofase, i cui avvolgimenti primari e secondari sono connessi ad un sistema trifase. Rispetto al trasformatore monofase, quindi, si aggiunge un “grado di libertà” in più nella classificazione in quanto gli avvolgimenti possono essere collegati in diversi modi che influenzano, in pratica, il rapporto e la fase tra le tensioni concatenate al primario e al secondario. A seconda dello sfasamento introdotto tra tensioni al primario e tensioni al secondario (detto indice orario), i trasformatori vengono suddivisi in gruppi. L'indice orario (o gruppo) di un trasformatore si calcola semplicemente dividendo l'angolo di fase tra tensione primaria e secondaria (o spostamento angolare) per 30°:

$$i = \frac{\alpha}{30^\circ}$$

Analizziamo i collegamenti più comuni e vediamo come influiscono sia sulla fase che sul rapporto di trasformazione.

Stella con neutro/Stella con neutro

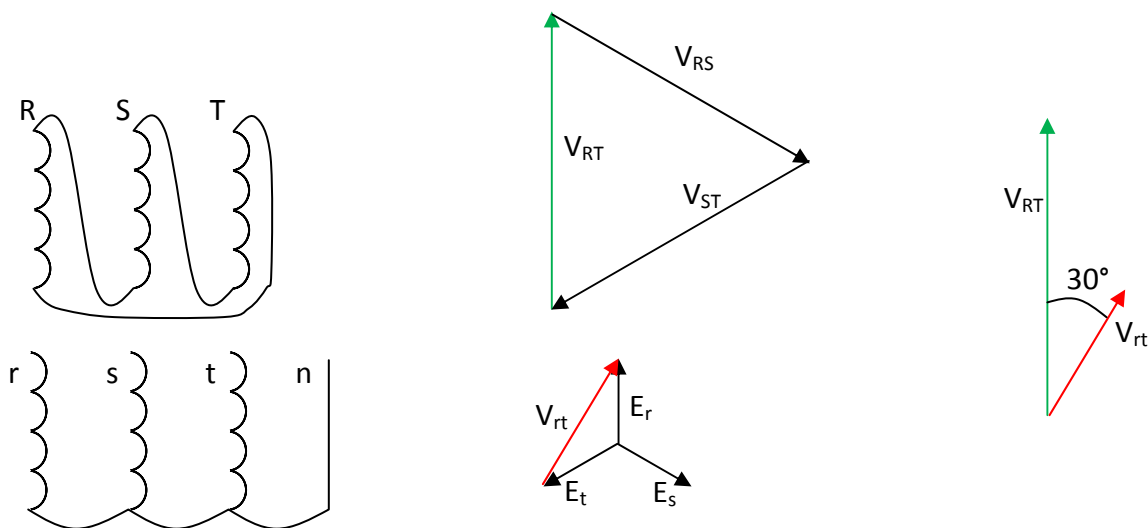
In questo tipo di trasformatore il rapporto di trasformazione k è uguale al rapporto del numero di spire e non vi sono sfasamenti tra le tensioni a primario e secondario.

Triangolo/Stella con neutro

In questo tipo di trasformatore il rapporto k risulta pari a

$$k = \frac{V_{RT}}{V_{rt}} = \frac{j\omega N_1 \Phi_R}{j\omega N_2 \sqrt{3} \Phi_R} = \frac{N_1}{\sqrt{3} N_2}$$

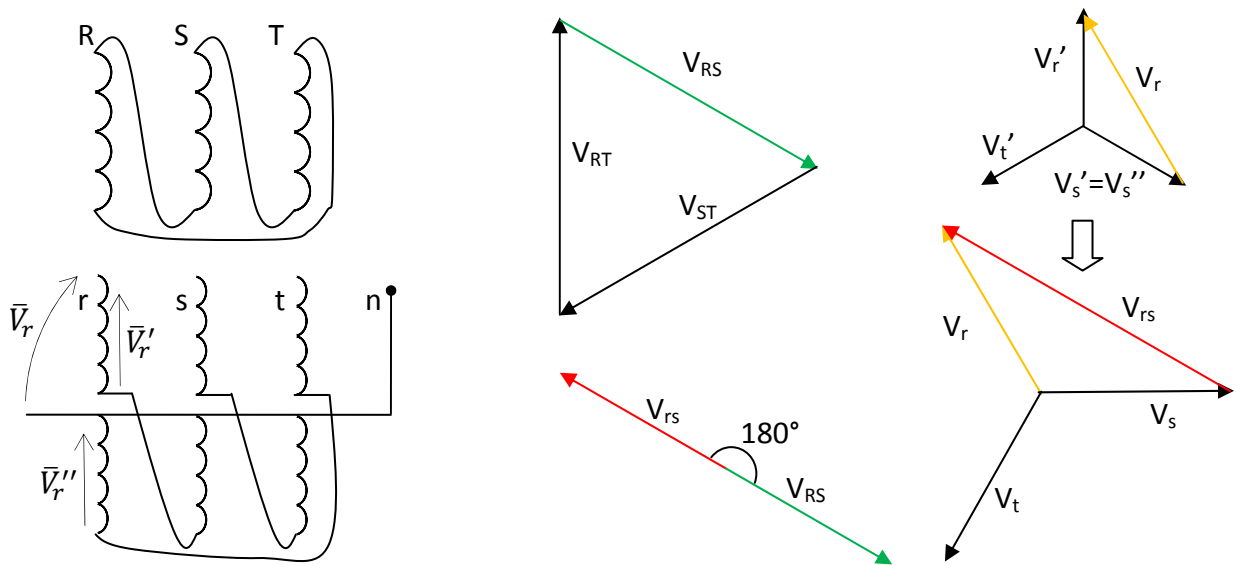
Lo sfasamento tra le tensioni concatenate tra primario e secondario di questo trasformatore è di 30°, come facilmente visibile in figura:



Se l'avvolgimento fosse stato Yd, l'angolo α sarebbe stato di 330°.

Triangolo/Zig-zag

Un particolare tipo di collegamento realizzato nei trasformatori trifase è il seguente:



È chiamato collegamento a zig-zag. Ogni semiavvolgimento secondario possiede $\frac{N_2}{2}$ spire. Con riferimento alla figura possiamo scrivere:

$$\begin{cases} V_r = V'_r - V''_s \\ V''_s = V'_s \end{cases} \rightarrow V_r = \sqrt{3}V'_r; \quad V'_r = j\omega \frac{N_2}{2} \Phi_R;$$

Quindi il rapporto di trasformazione è di

$$k = \frac{V_{RS}}{V_{rs}} = \frac{\omega N_1 \Phi_R}{\sqrt{3}V_r} = \frac{\omega N_1 \Phi_R}{\sqrt{3}\sqrt{3}V'_r} = \frac{2 N_1}{3 N_2}$$

Con un angolo α di 180° .

2.2 ARMONICHE DI MAGNETIZZAZIONE

Supponiamo di alimentare un avvolgimento di un trasformatore con una tensione sinusoidale tipo

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t)$$

Se trascuriamo le perdite per effetto Joule negli avvolgimenti possiamo scrivere

$$v(t) \approx \frac{d\Psi(t)}{dt}$$

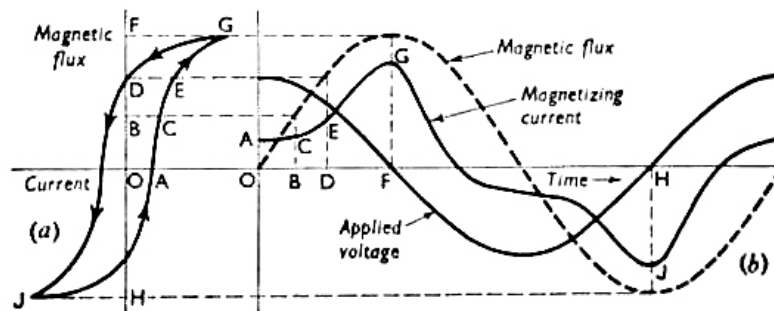
Da cui risulta

$$\Psi(t) = \frac{\sqrt{2}V}{\omega} \sin(\omega t)$$

Questo è il flusso concatenato che si svolge nel nucleo, a cui è associato un flusso pari a

$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{2}V}{\underbrace{\omega N}_{\Phi_{max}}} \sin(\omega t)$$

Si vuole capire che andamento ha la $i(t)$. Per far ciò, è necessario considerare il diagramma di isteresi del ferro del nucleo. È evidente che, imponendo un flusso di tipo sinusoidale, per effetto della non linearità del comportamento del ferro, si vengono ad introdurre delle armoniche superiori di corrente di magnetizzazione:



Scomponendo la $i(t)$ in serie di Fourier, ottengo, oltre alla prima armonica in seno, un termine in coseno e, successivamente, tutte le armoniche dispari in seno:

$$i(t) = \sqrt{2}[I_{1s} \sin(\omega t) + I_{1c} \cos(\omega t) + I_{3s} \sin(3\omega t) + I_{5s} \sin(5\omega t) + \dots]$$

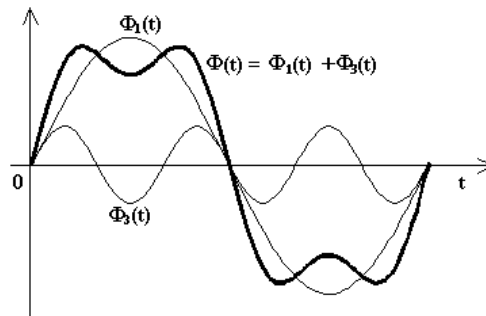
Se, però, il trasformatore è alimentato da una terna di tensioni trifase esprimibili usualmente come

$$\begin{cases} V_R = \sqrt{2}V \cos(\omega t) \\ V_S = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ V_T = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$$

La terna di correnti di magnetizzazione che ne deriva è del tipo:

$$\begin{cases} i_R = \sqrt{2}[I_{1s} \sin(\omega t) + I_{1c} \cos(\omega t) + I_{3s} \sin(3\omega t) + \dots] \\ i_S = \sqrt{2}\left[I_{1s} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + I_{1c} \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + I_{3s} \sin 3\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + I_{5s} \sin 5\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \dots\right] \\ i_T = \sqrt{2}\left[I_{1s} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) + I_{1c} \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) + I_{3s} \sin 3\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) + I_{5s} \sin 5\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) + \dots\right] \end{cases}$$

Si può notare che le armoniche di ordine $6n+1$ (con n che parte da zero) sono di sequenza diretta, pertanto la somma delle correnti ha risultante nulla. Ciò è altresì vero per le armoniche di ordine $6n+5$, essendo queste ultime di sequenza inversa. Le restanti armoniche di ordine $6n+3$ sono di sequenza omopolare, la cui somma non è nulla. Se il trasformatore trifase è dotato di neutro a terra, oppure ha un avvolgimento a triangolo, allora queste armoniche possono circolare. Se queste armoniche non possono circolare, la corrente di magnetizzazione deve essere necessariamente sinusoidale. Per effetto dell'isteresi, quindi, si avrà un flusso armonico nel nucleo, come quello riportato in figura:

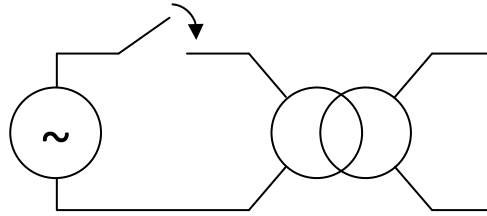


Tralasciando considerazioni su armoniche di ordine superiore (comunque poco rilevanti), ciò significa che nel nucleo è presente un flusso di terza armonica (quindi omopolare) che, nei trasformatori a tre colonne, non si richiude nel ferro ma in aria, incontrando un percorso caratterizzato da una riluttanza superiore. Ad un flusso armonico segue una tensione di fase armonica (ma non concatenata! La tensione concatenata non contiene armoniche).

Per ovviare al problema della magnetizzazione si può ricorrere sia all'avvolgimento a triangolo (che rappresenta un corto circuito per le correnti omopolari), sia ad un particolare tipo di trasformatore a tre avvolgimenti, in cui un avvolgimento è semplicemente un triangolo chiuso su sé stesso, che serve a far circolare le armoniche di corrente linearizzando il comportamento del trasformatore.

2.3 INSERIZIONE DI UN TRASFORMATORE

Vogliamo analizzare il transitorio di inserzione in rete di un trasformatore. Consideriamo il seguente circuito:



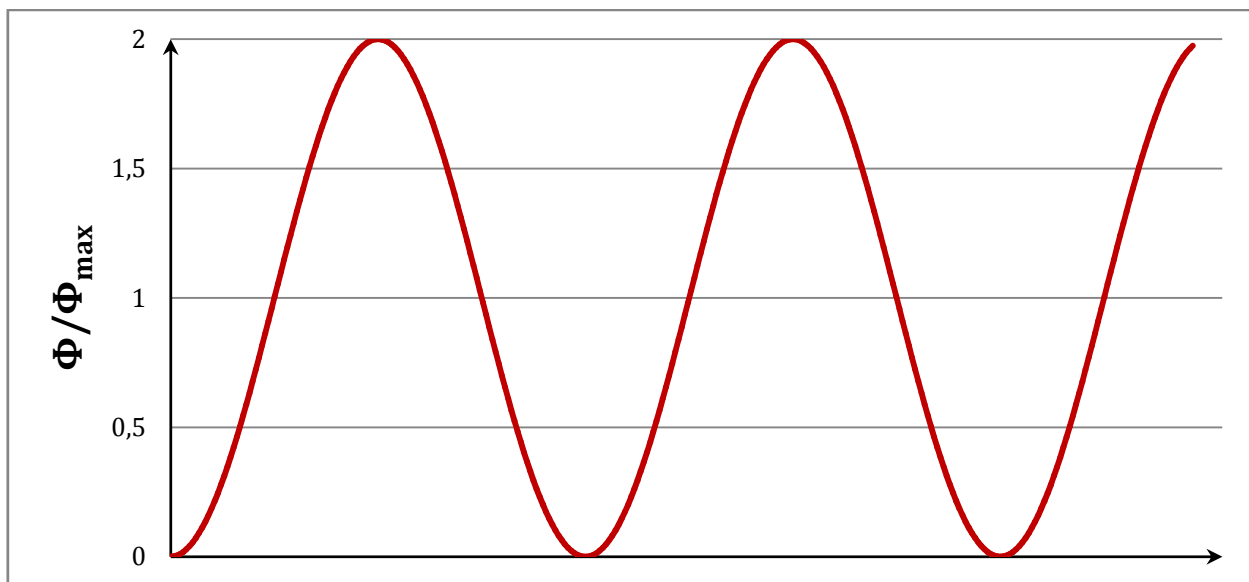
In cui l'interruttore viene chiuso ad un tempo $t_0=0$. Consideriamo che la tensione $V(t)$ abbia un andamento tipo:

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t - \varphi_v) = \underbrace{Ri}_{\text{trascurabile}} + \frac{d\Psi}{dt}$$

Il flusso φ è quindi pari a:

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{2}V}{N} \int_0^t \cos(\omega t - \varphi_v) dt = \frac{\sqrt{2}V}{N\omega} [\sin(\omega t - \varphi_v)]_0^t = \Phi_{max} [\sin(\omega t - \varphi_v) + \sin \varphi_v]$$

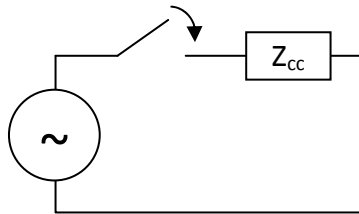
È evidente che, a seconda del valore di φ_v si ottengono dei diversi valori di ampiezza del flusso. Ad esempio per $\varphi_v = \frac{\pi}{2}$ si ha che il flusso oscilla tra $2\Phi_{max}$ e zero:



In questa condizione la corrente ha dei picchi che possono raggiungere l'ordine di grandezza delle correnti di corto circuito. Per questo motivo, in trifase, è necessario che gli interruttori di sicurezza siano ritardati per consentire l'inserzione dei trasformatori. La corrente di inserzione può durare anche alcuni minuti.

Si vuole calcolare l'intensità di tale corrente nelle condizioni peggiori, quelle di cortocircuito. C'è da notare anche che, essendo il flusso aumentato (anche fino a $2\Phi_{max}$, come abbiamo visto) il

punto di funzionamento sul diagramma di isteresi si porta ben oltre il ginocchio della curva, con conseguente aumento delle correnti magnetizzanti. Consideriamo un circuito equivalente come:



Per cui vale la seguente

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t - \varphi_v) = R_{cc}i + L_{cc} \frac{di}{dt}$$

All'istante della chiusura dell'interruttore la corrente che circola nel circuito è data dalla somma di una corrente permanente (di regime) e una componente transitoria, esprimibili rispettivamente dall'integrale generale e dall'integrale particolare, soluzioni dell'equazione differenziale:

$$i(t) = i'(t) + i''(t)$$

La $i'(t)$, soluzione a regime, è semplicemente pari a:

$$i'(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi_v - \varphi_{cc}) \quad \text{con} \quad I = \frac{V}{Z_{cc}}$$

Mentre la $i''(t)$, soluzione transitoria, è pari a:

$$i''(t) = k \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L_{cc}}{R_{cc}}$$

Per trovare il valore del coefficiente k si ricorre alla condizione iniziale per cui $i(0) = 0$, quindi:

$$i(0) = \sqrt{2} I \cos\left(\varphi_v + \frac{\pi}{2}\right) + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -\sqrt{2} I \cos\left(\varphi_v + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dove è stato posto

$$\varphi_{cc} = \frac{\pi}{2}$$

Essendo la reattanza di corto circuito prevalente sulla resistenza ($L_{cc} \gg R_{cc}$).

In conclusione, la corrente che si stabilisce a seguito dell'inserzione di un trasformatore è pari a

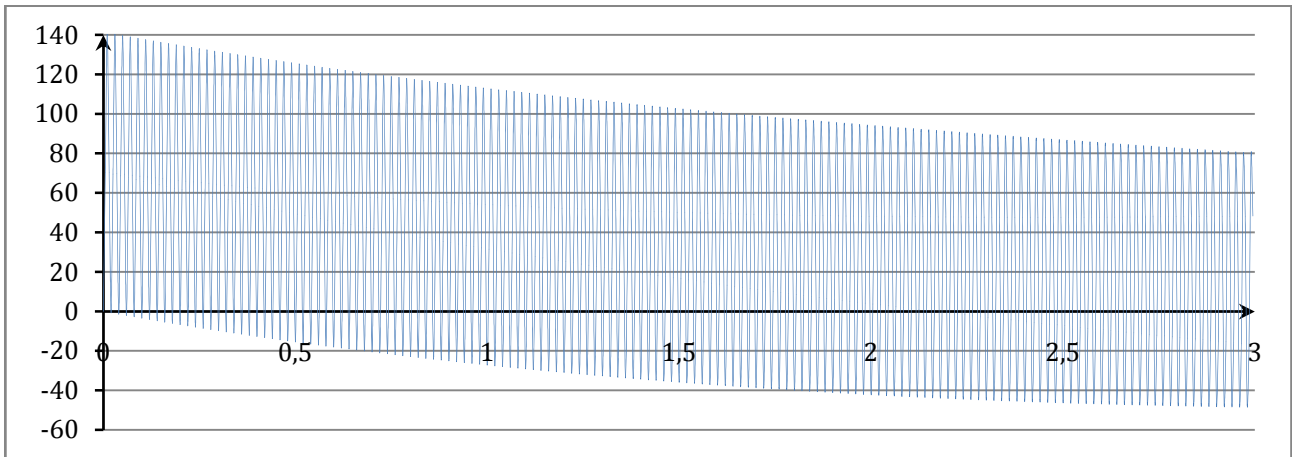
$$i(t) = \sqrt{2} I \left[\sin(\omega t - \varphi_v) + \sin \varphi_v \cdot e^{-t/\tau} \right]$$

La $i(t)_{max}$ si verifica, come previsto, in concomitanza di $\varphi_v = \frac{\pi}{2}$ ed è pari a:

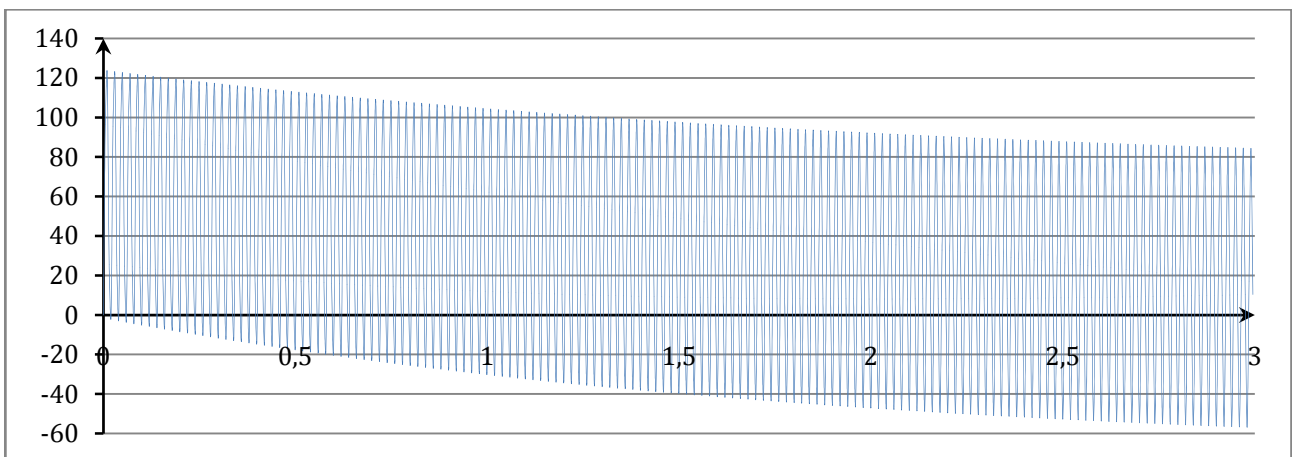
$$i(t)_{max} = 2\sqrt{2} I$$

Ciò è evidente simulando il transitorio di inserzione con un programma di calcolo. In questo caso è stato posto $\tau = 2\text{ s}$ per visualizzare meglio il transitorio (che normalmente è molto più lungo), inoltre sono stati posti $I = 50\text{ kA}$ e $\omega = 314\text{ rad/s}$.

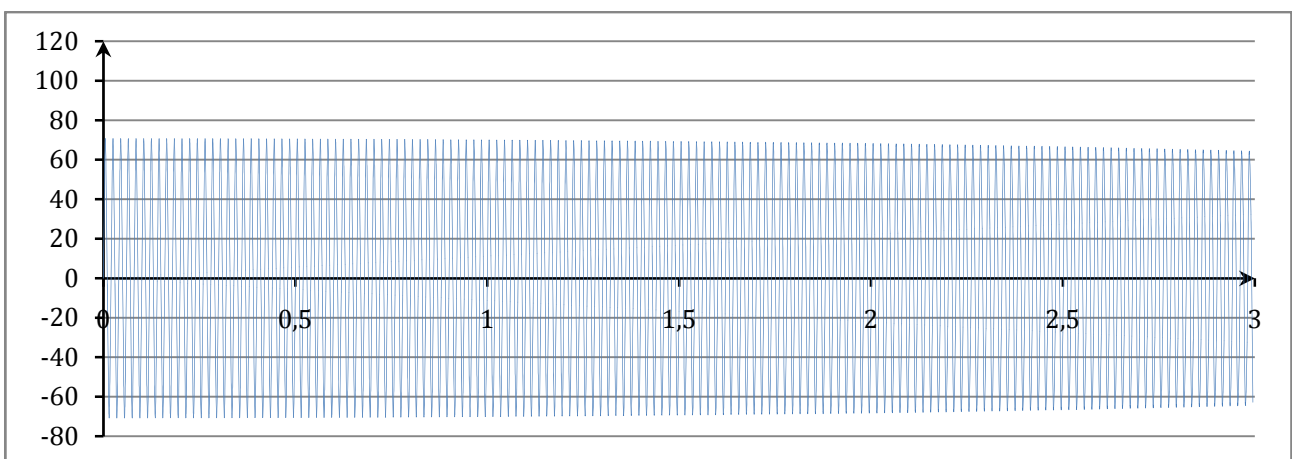
Per un angolo $\varphi_v = \frac{\pi}{2}$ si ha un andamento tipo:



Per $\varphi_v = \frac{\pi}{3}$ si ha:



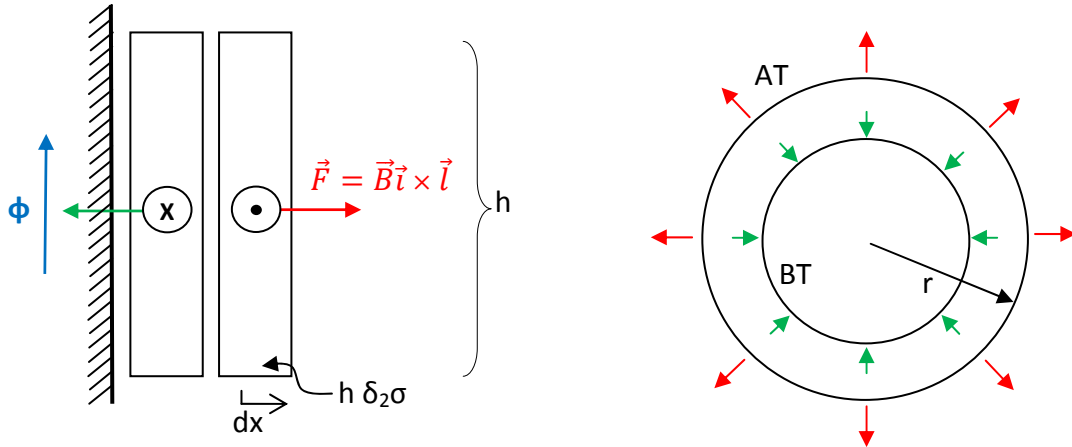
mentre, per $\varphi_v = 0$:



2.4 FORZE SUGLI AVVOLGIMENTI

Si vogliono stimare le forze elettrodinamiche che agiscono sugli avvolgimenti durante l'esercizio e, soprattutto, durante i guasti.

Per far ciò, si ipotizzano gli avvolgimenti come fossero cilindri in pressione. Consideriamo quindi una figura come la seguente:



Dobbiamo calcolare la pressione dovuta al campo magnetico.

Per quanto riguarda l'**avvolgimento esterno** (il più sollecitato in quanto sottoposto a sollecitazioni di trazione, mentre quello interno è sottoposto essenzialmente a compressione), possiamo scrivere che la variazione di energia di campo magnetico dW_m è pari al lavoro effettuato dalla pressione sulla superficie del nostro "cilindro":

$$P \underbrace{2\pi hr}_{\text{superficie}} dx = dW_m$$

L'energia magnetica è pari a:

$$W_m = \iiint \frac{1}{2} HB dw = \frac{1}{2} L_{cc} i_{max}^2 = \frac{1}{2} N_1^2 i_{max}^2 \mu_0 \frac{2\pi r}{h} \left(\frac{\delta_1}{3} + \Delta_{12} + \frac{\delta_2}{3} \right)$$

Sostituendo il termine contenuto tra parentesi con dx si ottiene la variazione di energia magnetica, che è quindi pari a:

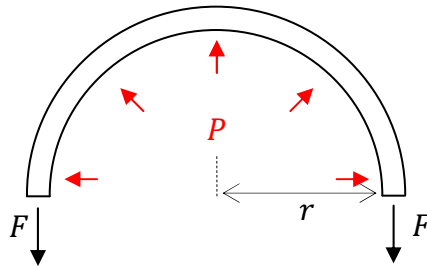
$$dW_m = \frac{1}{2} N_1^2 i_{max}^2 \mu_0 \frac{2\pi r}{h} dx$$

In questo modo si ricava la pressione, che è pari a:

$$P = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{N_1 i_{max}}{h} \right)^2}_{H_d^2} \mu_0$$

Dove con il termine H_d si intende il campo di dispersione tra i due avvolgimenti.

A questo punto è possibile applicare le formule di Mariotte per i contenitori cilindrici in pressione, per cui, considerando una figura come:



vale la relazione:

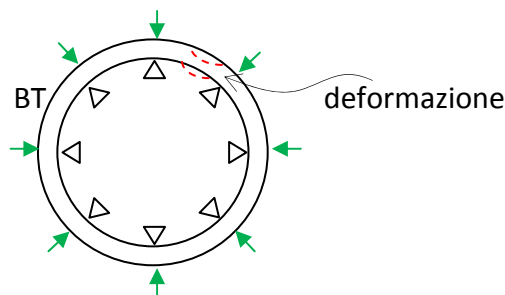
$$F = 2 r h P = 2 h \delta_2 \sigma$$

Da cui

$$\sigma = \frac{r}{\delta_2} P$$

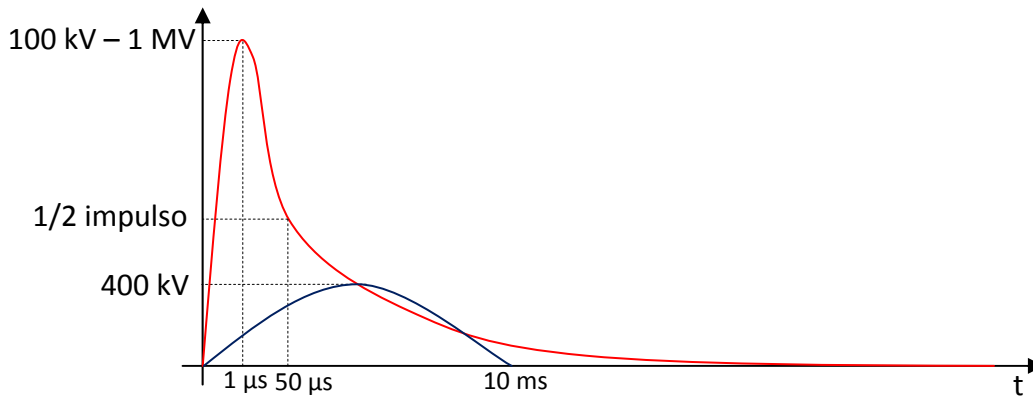
Che è lo sforzo sui conduttori cercato.

Per quanto riguarda l'**avvolgimento interno**, come già accennato, i problemi di sforzi sui conduttori sono inferiori, essendo essenzialmente sottoposti a compressione. Sussistono tuttavia altri tipi di problemi come le possibili deformazioni degli avvolgimenti sugli appoggi dovuti alla distribuzione degli appoggi lungo il diametro interno dell'avvolgimento, come in figura a destra

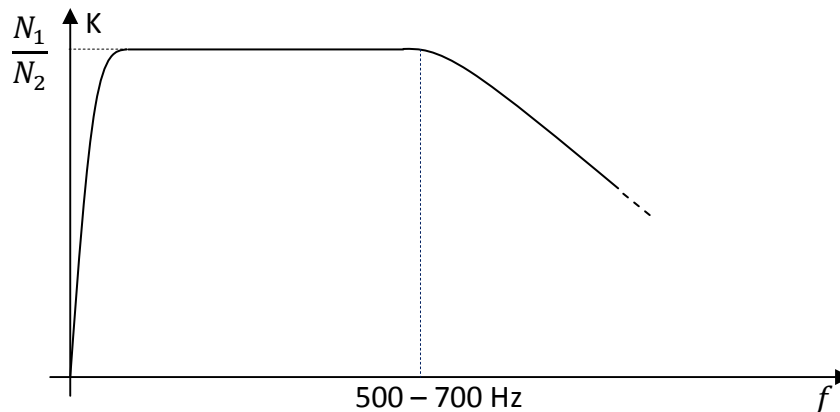


2.5 SOVRATENSIONI

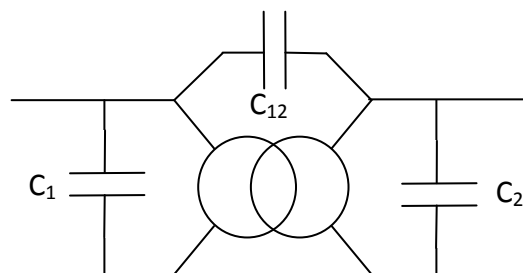
Si vuole studiare il comportamento del trasformatore quando viene colpito da un'onda di sovratensione dovuta, ad esempio, alla fulminazione di un elettrodotto in una rete di cui il trasformatore è parte. Una sovratensione è sempre caratterizzata da un elevatissimo picco di tensione, anche dell'ordine di 10^6 V, in un tempo rapidissimo, nell'ordine del microsecondo:



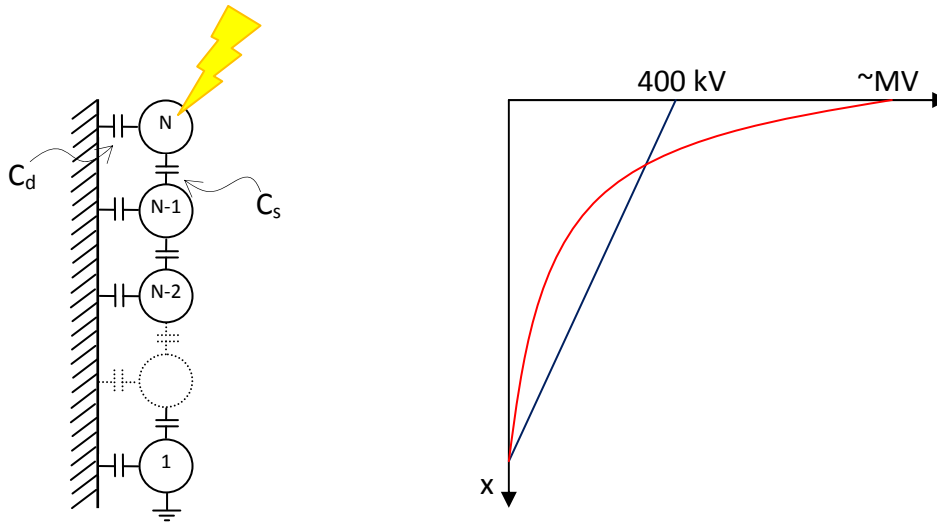
La frequenza equivalente di questo impulso è nell'ordine di qualche kHz. A queste frequenze, il rapporto di trasformazione del trasformatore si riduce, come è evidente dal seguente grafico:



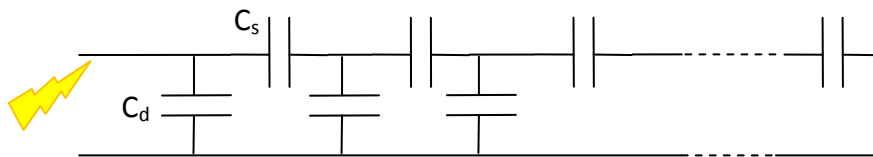
Oltre a ciò, ad alte frequenze diventano non trascurabili gli accoppiamenti capacitivi tra primario e secondario e tra le spire dei singoli avvolgimenti, sicché il circuito equivalente del trasformatore per elevate frequenze diventa:



È interessante notare che, in caso di fulminazione, la distribuzione della tensione sulle spire dell'avvolgimento (linea rossa) cambia in modo sensibile, rispetto alla distribuzione lineare che si ha nel funzionamento a regime (linea blu):



In questa situazione, l'isolamento delle prime spire cede (in gergo si dice che il trasformatore "spara") e l'avvolgimento si danneggia. Per questo motivo le prime spire degli avvolgimenti dei trasformatori vengono costruite utilizzando un isolamento maggiore. Possiamo studiare il circuito equivalente alla situazione fisica descritta con un circuito a parametri distribuiti siffatto:



Chiamando con C_d e C_s rispettivamente la capacità derivata totale e la capacità serie totale:

$$C_d = \frac{C_{TOTd}}{h} \quad \left[\frac{F}{m} \right]$$

$$C_s = C_{TOTs} \cdot h \quad [F \cdot m]$$

Possiamo scrivere la tensione e la corrente rispetto alla generica ascissa x come:

$$\begin{cases} V_x = V_0 e^{-\gamma x} \\ I_x = \frac{V_0}{Z_c} e^{-\gamma x} \end{cases}$$

Dove

$$\gamma = \sqrt{Z_e Y_d} = \sqrt{\frac{j\omega C_d}{j\omega C_s}} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{C_{TOTd}}{C_{TOTs}}} = \frac{\alpha}{h}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_e}{Y_d}}$$

Da cui la tensione, in particolare, vale:

$$V(x) = V_{max} \frac{\sinh[\gamma(h-x)]}{\sinh(\gamma h)}$$

E la derivata in zero (sulla prima spira) è pari a:

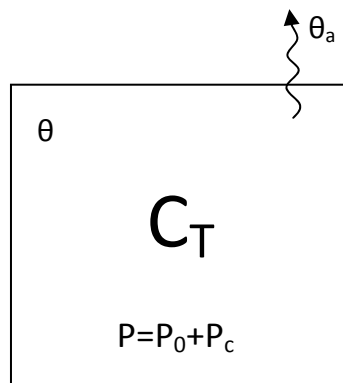
$$\left. \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha \frac{V_{max}}{h} \coth(\alpha)$$

2.6 FENOMENI TERMICI

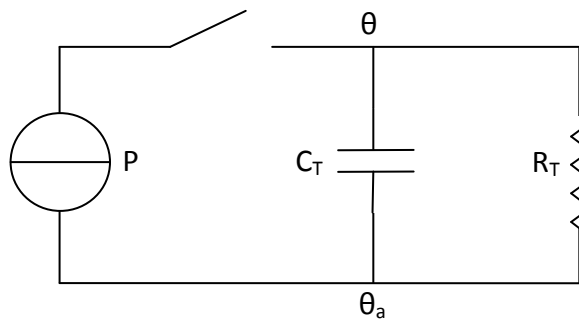
Si vogliono studiare i fenomeni termici che hanno luogo nei trasformatori. Il modello termico più semplice è quello (a scatola chiusa) che mette in conto la potenza P persa nel rame e nel ferro, la temperatura θ del trasformatore, la temperatura θ_a dell'ambiente e la capacità termica totale del trasformatore, data dalla somma delle capacità termiche di rame, olio e ferro:

$$C_T = C_{T,cu} + C_{T,olio} + C_{T,fe}$$

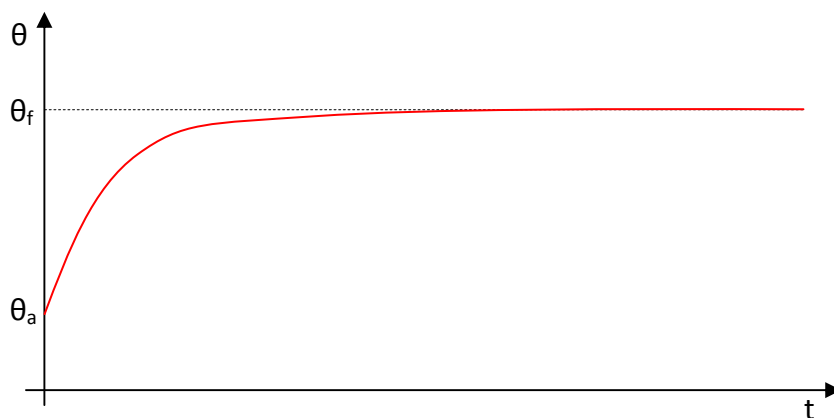
Considerando uno schema basilare tipo:



A cui corrisponde il seguente circuito equivalente:



È evidente che la risposta di un circuito siffatto è del tipo RC:



Possiamo scrivere:

$$C_T \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{R_t} (\theta - \theta_a) = P$$

La soluzione dell'equazione differenziale è del tipo:

$$\theta(t) = \theta_a + (\theta_f - \theta_a) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

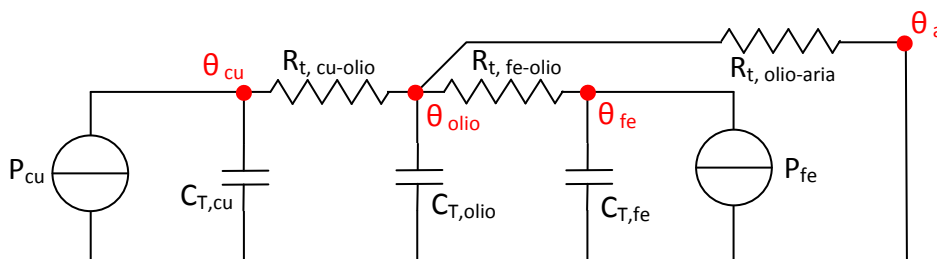
Con

$$\theta_f = \theta_a + R_t \cdot P \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \theta_f - \theta_a = R_t \cdot P$$

Da questa equazione è evidente che nel caso in cui la temperatura dell'ambiente sia inferiore alla temperatura di progetto, per cui

$$\theta_a < \theta_{a,progetto} = 40^\circ C$$

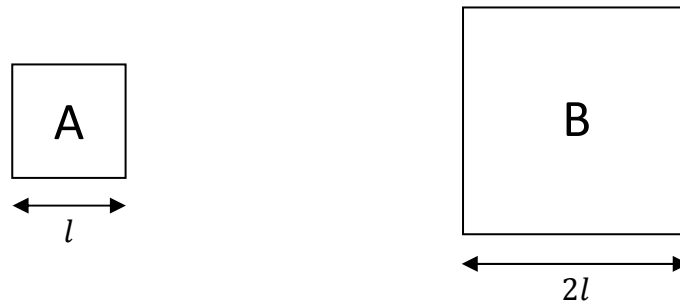
La macchina può essere sovraccaricata. Tuttavia, se si porta al sovraccarico la macchina oltre la θ prevista di funzionamento, la macchina si deteriora. Per avere un'idea del deterioramento, è possibile stimare che, con un sovraccarico permanente di $8^\circ C$, la vita utile si dimezza. Un circuito termico più accurato rispetto a quello utilizzato fino a qui è il seguente:



in questo circuito si considerano separatamente le perdite nel ferro e nel rame, ed è possibile stimare le temperature di lavoro sia degli avvolgimento che del nucleo. Considerazioni termiche più accurate sono certamente possibili, ma se si desidera studiare più a fondo il problema è più semplice ricorrere ad un programma agli elementi finiti.

2.7 EFFETTO SCALA

Consideriamo due trasformatori A e B aventi lo stesso numero di spire, ma di dimensioni diverse:



A e B hanno, ad esempio, uguale B_{max} (massima induzione nel ferro) ed uguale J (densità di corrente). Mettiamo a confronto i parametri che derivano da queste ipotesi:

Trasformatore A	Trasformatore B
$V_A = E = \omega N \Phi = \omega N B S_{fe}$	$V_B = 4V_A$ perché $S_{feB} = 4S_{feA}$
$I_A = JS_{cu}$	$I_B = 4I_A$
$P_A = V_A I_A$	$P_B = 16P_A$

Più interessante della potenza è la potenza specifica, ossia la potenza per unità di volume:

$$\frac{P_B}{Vol_B} = 2 \frac{P_A}{Vol_A}$$

È quindi evidente che la potenza specifica di una macchina grande è migliore rispetto a quella di una macchina piccola. Questo fenomeno è detto effetto scala. Anche le perdite migliorano. Possiamo infatti dire che le perdite sono essenzialmente proporzionali al volume, quindi:

$$P_{dA} \propto l^3$$

$$P_{dB} \propto (2l)^3 = 8P_{dA}$$

Il rendimento del trasformatore A è pari a:

$$\eta_A = 1 - \frac{P_{dA}}{P_A} = 1 - k$$

Mentre il rendimento del trasformatore B è pari a:

$$\eta_B = 1 - \frac{P_{dB}}{P_B} = 1 - \frac{k}{2}$$

In quanto il rapporto $\frac{P_{dB}}{P_B} = \frac{8 P_{dA}}{16 P_A} = \frac{k}{2}$. Quindi i trasformatori più grandi, oltre ad avere una potenza specifica maggiore hanno anche delle perdite minori.

Per quanto riguarda le correnti a vuoto e le tensioni di corto circuito si può dimostrare che

$$i_{0A} \% = k \% \quad i_{0B} \% = \frac{k}{2} \%$$
$$v_{ccA} \% = k \% \quad v_{ccB} \% = 2k \%$$

L'inconveniente dei trasformatori di grandi dimensioni è che il sistema di raffreddamento deve essere più efficace, in quanto

$$\Delta\theta = R_T P_d$$

Nel trasformatore B le perdite sono 8 volte quelle del trasformatore A, mentre la R_t , che è proporzionale alla lunghezza e inversamente proporzionale alla superficie, è 4 volte più piccola; quindi, in definitiva, risulta

$$\Delta\theta_B = 2\Delta\theta_A$$

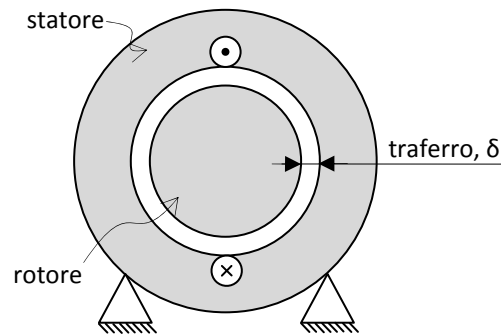
Da cui si evince che il sistema di raffreddamento deve essere migliore, per mantenere una temperatura di esercizio adeguata.

CAPITOLO 3

CAMPO MAGNETICO ROTANTE

3.1 CAMPO MAGNETICO ROTANTE

Consideriamo una macchina rotante avente una sola spira di statore, come nella seguente figura:



Scegliendo una linea di circuitazione si può calcolare il campo di induzione magnetica B nel traferro:

$$\oint H dl = \int_{fe} H dl + 2 \int_{traferro} H dl = I$$

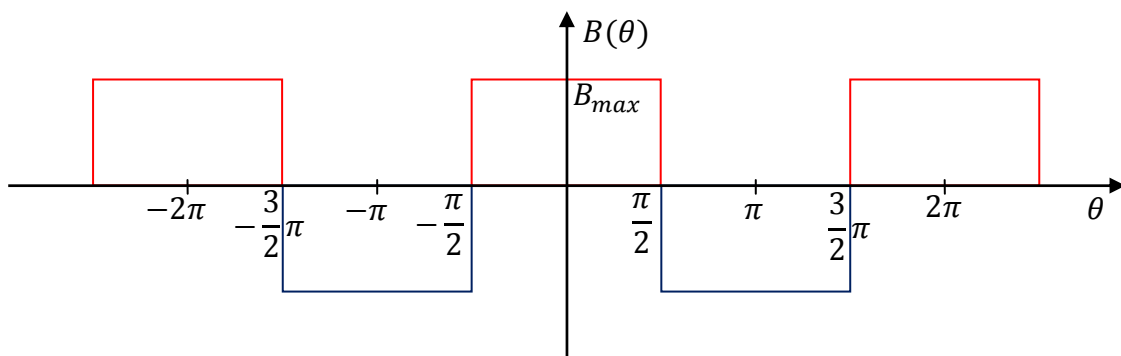
Considerando che la permeabilità magnetica dell'aria è molto minore di quella del ferro, si può porre in prima approssimazione $\mu_{fe} = \infty$. Chiamando con δ lo spessore del traferro si ha che

$$2 \int_{\delta} H dl = 2h\delta = I$$

Da cui si ottiene che il campo magnetico massimo nel traferro vale:

$$B_{max} = \frac{\mu_0 I}{2\delta}$$

Ed ha l'andamento riportato in figura (i colori sono per indicare Nord e Sud, convenzionalmente rosso Nord e blu Sud):



Esprimibile in serie di Fourier come:

$$B(\theta) = \frac{4}{\pi} B_{max} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cos(2h + 1) \theta}{2h + 1}$$

Consideriamo a questo punto soltanto la prima armonica, ossia:

$$B(\theta) = \frac{4}{\pi} B_{max} \cos \theta$$

E supponiamo di porre in rotazione il rotore a velocità ω_r . L'equazione di $B(\theta)$ cambia e diventa

$$B(\theta) = \frac{4}{\pi} B_{max} \cos(\theta - \omega_r t)$$

Immaginiamo, ora, di aggiungere altre due fasi (altre due spire), geometricamente sfasate di $\frac{2}{3}\pi$ l'una dall'altra, sicché, nello statore, vi siano complessivamente 3 fasi: R, S e T. Supponiamo di iniettare in queste tre spire, una terna di correnti trifase. Vogliamo calcolare la B che ne risulta:

$$\begin{cases} B_R(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{i_R(t)}{2\delta} \cos(\theta) = B_{max} \sin(\omega t) \cos(\theta) \\ B_S(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{i_S(t)}{2\delta} \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) = B_{max} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \\ B_T(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{i_T(t)}{2\delta} \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) = B_{max} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases} \text{ con } B_{max} = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{\sqrt{2}I}{2\delta}$$

Applicando la prima formula di Werner, per cui $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ a tutte e tre le equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} B_R(\theta, t) = \frac{B_{max}}{2} [\sin(\omega t + \theta) + \sin(\omega t - \theta)] \\ B_S(\theta, t) = \frac{B_{max}}{2} \left[\sin\left(\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin(\omega t - \theta) \right] \\ B_T(\theta, t) = \frac{B_{max}}{2} \left[\sin\left(\omega t + \theta - \frac{8}{3}\pi\right) + \sin(\omega t - \theta) \right] \end{cases}$$

Sommando i tre contributi è evidente che una parte si elide (costituendo, di fatto, una terna simmetrica), mentre una parte si somma, tale che il campo magnetico al centro di traferro diviene pari a

$$B_{tot}(\theta, t) = \frac{3}{2} B_{max} \sin(\omega t - \theta)$$

Se avessimo considerato non una sola coppia polare bensì più coppie polari si avrebbe avuto un andamento di B del tipo:

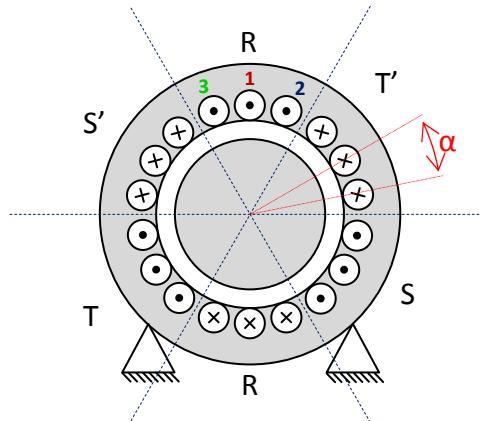
$$B(\theta) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{I}{2\delta} \cos(p\theta)$$

Dove p è il numero di coppie di poli. Con un ragionamento analogo a quello già effettuato, si può giungere ad un'espressione per il campo magnetico rotante pari a

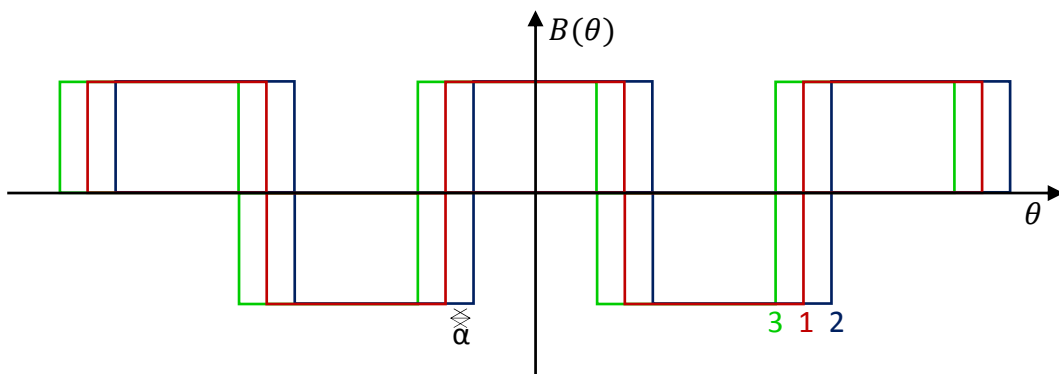
$$B(\theta, t) = \frac{3}{2} B_{max} \sin(\omega t - p\theta) = \frac{3}{2} B_{max} \sin\left[p\left(\frac{\omega}{p} t - \theta\right)\right]$$

3.2 COEFFICIENTI DI DISTRIBUZIONE E DI PASSO

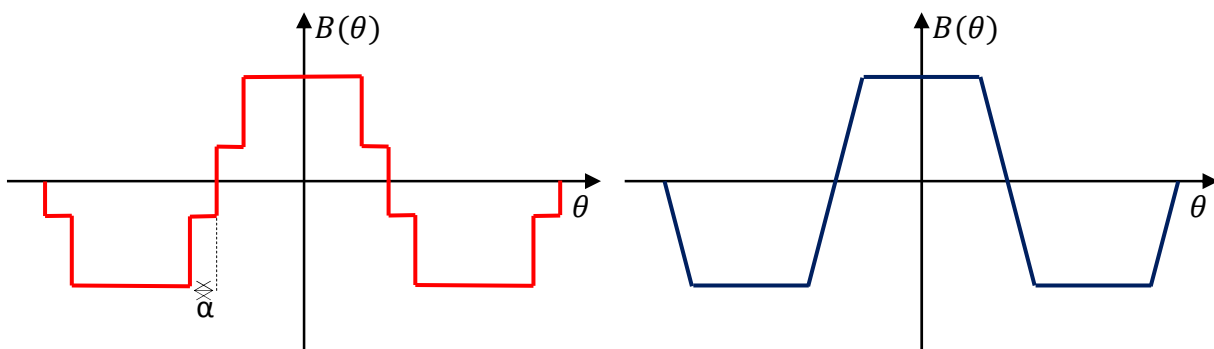
È necessario fare ulteriori considerazioni derivate dalla costruzione delle macchine reali. Per far ciò consideriamo una macchina con $p = 1$ coppie polari, caratterizzata da un certo numero di cave per polo e per fase, indicato con la lettera q . Ad esempio una macchina con $q = 3$ avrebbe una struttura come quella riportata in figura:



In questa situazione $B(\theta)$ cambia in virtù del fatto che diviene la somma di più contributi, sfasati di un angolo α :



La forma d'onda complessiva risulta "scalettata" (figura rossa a sinistra). Per $q \rightarrow \infty$ l'onda diviene trapezoidale (figura blu a destra), ed è meglio approssimabile ad una sinusoide:



Aumentando q , quindi, si riducono le armoniche di ordine superiore.

Consideriamo i tre campi della fase R:

$$\begin{cases} B_{R1}(\theta) = B_{max} \cos(\theta) \\ B_{R2}(\theta) = B_{max} \cos(\theta - \alpha) \\ B_{R3}(\theta) = B_{max} \cos(\theta + \alpha) \end{cases} \quad \text{con} \quad B_{max} = \frac{4}{\pi} \frac{I}{2\delta} \mu_0$$

Se si sommano si ha che:

$$\sum_{i=1}^3 B_i = K_d 3B_{max}$$

K_d è detto **fattore di distribuzione**, ed è un parametro introdotto per tenere conto del fatto che la somma vettoriale dei campi prodotti dalle spire nelle q cave è inferiore alla somma dei moduli ($3B_{max}$). Per questo, ovviamente, risulta $K_d < 1$.

Un ulteriore parametro di cui si tiene conto nel calcolo di B per le macchine reali è il **coefficiente di passo** K_p . Questo coefficiente tiene conto del fatto che per eliminare dall'onda delle f.e.m indotte le componenti armoniche dovute alla non perfetta sinusoidalità dell'induzione al traferro, molto spesso si ricorre a raccorciare il passo, ovvero i conduttori disposti in una cava non vengono collegati in serie con quelli disposti nella cava distante un passo polare, ma in quelli disposti in una cava più vicina. Raccorciando di un terzo il passo polare si elimina la componente armonica del terzo ordine, raccorciando di un quinto, quella del quinto ordine e così via. Il coefficiente di passo è esprimibile dalla formula:

$$K_p = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Dove β è l'angolo di passo raccorciato scelto. Anche per il coefficiente di passo vale $K_p \leq 1$.

3.3 CONSIDERAZIONI SULLE ARMONICHE

Come visto nel §2.2, il campo magnetico al centro di traferro è tutt'altro che sinusoidale. Ciò significa che nella macchina circolano correnti armoniche. Si vogliono studiare queste correnti. Per far ciò andiamo a calcolare il campo magnetico al centro di traferro, senza l'ipotesi semplificativa di trascurare le armoniche di ordine superiore:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_R(\theta, t) = B_{max} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos(2h+1)(\theta) \cdot \sin(\omega t) \\ B_S(\theta, t) = B_{max} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos(2h+1) \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \cdot \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \quad \text{con } B_{max} \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{\sqrt{2}I}{2\delta} nqK_dK_p \\ B_T(\theta, t) = B_{max} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos(2h+1) \left(\theta - \frac{4}{3}\pi \right) \cdot \sin \left(\omega t - \frac{4}{3}\pi \right) \end{array} \right.$$

La somma di queste tre componenti fornisce l'espressione del campo totale al traferro:

$$B_{tot}(\theta, t) = \underbrace{\frac{3}{2} B_{max} \sin(\omega t - \theta)}_{I \text{ armonica}} + \underbrace{0}_{III \text{ armonica}} + \underbrace{\frac{3}{2} B_{max} \sin(\omega t + 5\theta)}_{V \text{ armonica}} + \dots$$

È evidente come la prima armonica sia di sequenza diretta, la terza armonica nulla e la quinta armonica sia di sequenza inversa. Dalla VII armonica il ciclo ricomincia e si avrà:

- VII armonica → campo di sequenza diretta;
- IX armonica → nulla;
- XI armonica → campo di sequenza inversa;
- XIII armonica → campo di sequenza diretta;
- etc...

CAPITOLO 4

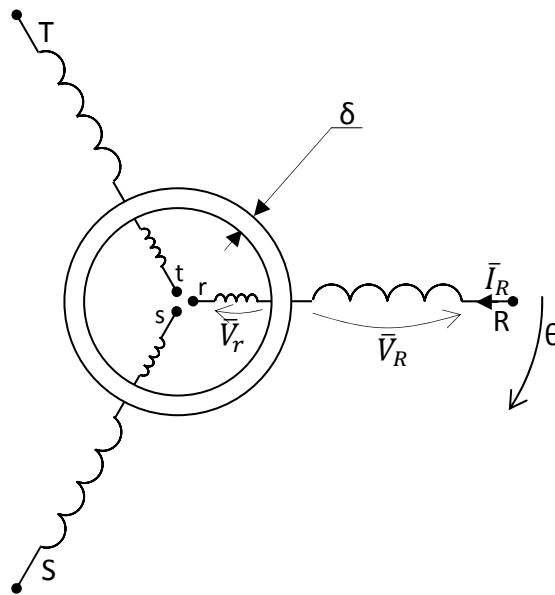
MACCHINA ASINCRONA

4.1 GENERALITÀ SULLA MACCHINA ASINCRONA

Qwerty

4.2 DEDUZIONE DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

Consideriamo una macchina siffatta:



Per cui valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \bar{V}_R = R_R \bar{I}_R + j\omega \bar{\Psi} \\ \bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + \dots \end{cases}$$

Il secondo termine della seconda equazione si determinerà in seguito. Per farlo ipotizziamo una corrente $i_R(t)$ siffatta:

$$i_R(t) = \sqrt{2} I_R \sin(\omega t)$$

A cui corrisponde un campo B di statore pari a:

$$B_s = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{2} I}{2\delta} \underbrace{\mu_0 (nqK_d K_p)}_{B_{tot}} \sin(\omega t - \theta)$$

Dove n è il numero di spire per cave e q il numero di cave per fase. Calcoliamo il flusso al centro di traferro:

$$\varphi = \iint B_s dS = rl \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B_{tot} \sin(\omega t - \theta) d\theta = rl B_{tot} [\cos(\omega t - \theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2rl B_{tot} \sin(\omega t)$$

Introducendo la grandezza τ detta passo polare, l'equazione diviene:

$$\varphi = 2 \frac{\tau}{\pi} l \cdot B_{tot} \sin(\omega t)$$

Definito il flusso, si può calcolare il flusso concatenato come il numero di spire totali (pari a nqK_dK_e) per il flusso:

$$\Psi = nqK_dK_e \cdot \varphi$$

Espandendo il termine φ , si ottiene una relazione diretta tra il flusso concatenato e la corrente (un coefficiente di induzione):

$$\Psi = \underbrace{\frac{6}{\pi^2} \mu_0 \frac{L\tau}{\delta} (n_s q_s K_{d_s} K_{p_s})^2}_{\lambda} \cdot \sqrt{2} I \sin(\omega t) = \lambda \cdot i(t)$$

D'ora in avanti verrà utilizzata come notazione r in pedice, le grandezze relative al rotore, e come s in pedice le grandezze relative allo statore. Possiamo allora scrivere le relazioni cercate come:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega \overbrace{\lambda_{ss} \bar{I}_s}^{\bar{\Psi}_{ss}} \\ \bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + j\omega \underbrace{\lambda_{rs} \bar{I}_s}_{\bar{\Psi}_{rs}} \end{cases}$$

Dove il coefficiente λ_{rs} , analogamente a quanto già visto per λ_{ss} , vale:

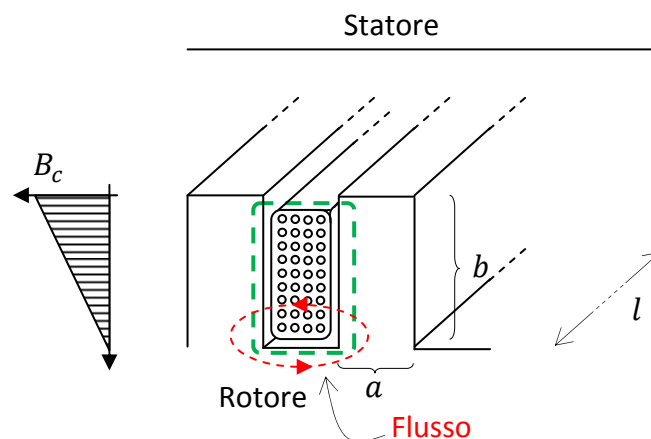
$$\lambda_{rs} = \frac{6}{\pi} \mu_0 \frac{L\tau}{\delta} (n_s q_s K_{d_s} K_{p_s}) (n_r q_r K_{d_r} K_{p_r})$$

NOTA: le macchine non si costruiscono mai con $q_s = q_r$ per evitare fluttuazioni di coppia che provocano rumori e vibrazioni.

Ipotizzando di poter iniettare anche delle correnti nel rotore, le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega \lambda_{ss} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{sr} \bar{I}_r \\ \bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + j\omega \lambda_{rs} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{rr} \bar{I}_r \end{cases}$$

Queste due equazioni, così scritte, non sono ancora complete. Esistono infatti dei flussi di dispersione. Nelle cave, ad esempio, alcune linee di forza non si richiudono nello statore (o nel rotore) come si può vedere dalla seguente figura:



Si può calcolare l'induttanza di dispersione in una cava considerando che B varia linearmente (con un massimo in corrispondenza della linea di circuitazione verde):

$$B_{max} = \frac{nI}{a} \mu_0; \quad \varphi_{cava} = \frac{B_{max}}{2} bl;$$

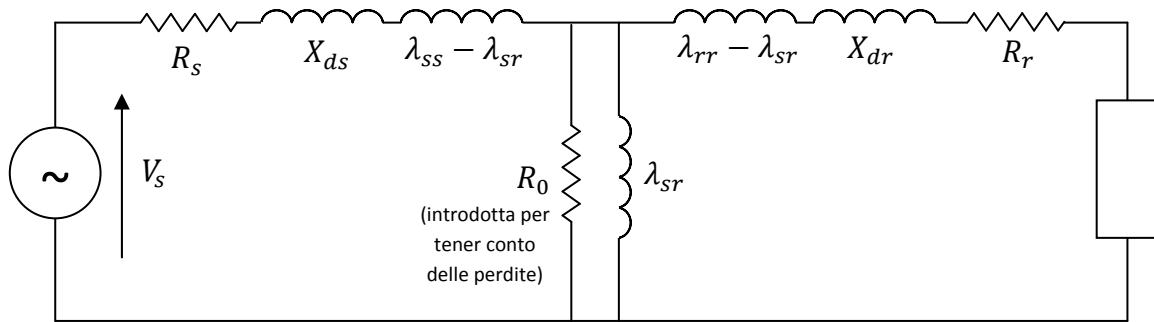
da cui

$$L_{cava} = \mu_0 \frac{bln^2}{3a}$$

Esistono anche altri flussi di dispersione, come alle teste dei denti e sulle connessioni frontali. Complessivamente si può individuare una reattanza di dispersione rotorica e statorica, con cui tenere conto di questi fenomeni:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + jX_{d_s} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{ss} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{sr} \bar{I}_r \\ \bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + jX_{d_r} \bar{I}_r + j\omega \lambda_{rs} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{rr} \bar{I}_r \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni è descrivibile con un circuito di due maglie siffatto:



Si introduce una \bar{I}'_r tale che

$$\lambda_{sr} \bar{I}_r = \lambda_{ss} \bar{I}'_r$$

E si effettuano una serie di passaggi per trasformare le equazioni:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + jX_{d_s} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{ss} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{sr} \bar{I}_r \\ \bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + jX_{d_r} \bar{I}_r + j\omega \lambda_{rs} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{rr} \bar{I}_r \end{cases}$$

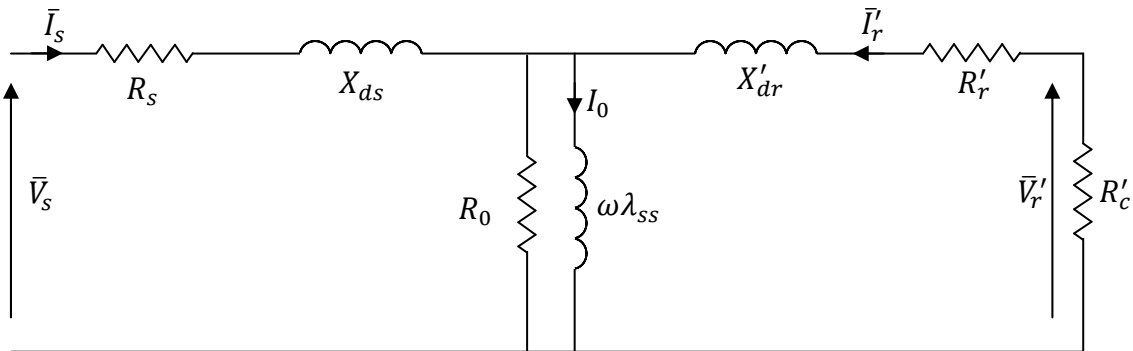
Introducendo \bar{I}'_r e moltiplicando la seconda equazione per $\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_{rs}}$:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + jX_{d_s} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{ss} (\bar{I}_s + \bar{I}'_r) \\ \frac{\lambda_{ss}}{\lambda_{rs}} \bar{V}_r = R_r \frac{\lambda_{ss}^2}{\lambda_{rs} \lambda_{sr}} \bar{I}'_r + jX_{d_r} \frac{\lambda_{ss}^2}{\lambda_{rs} \lambda_{sr}} \bar{I}'_r + j\omega \lambda_{ss} \bar{I}_s + j\omega \frac{\lambda_{ss}^2}{\lambda_{rs} \lambda_{sr}} \lambda_{rr} \bar{I}'_r \end{cases}$$

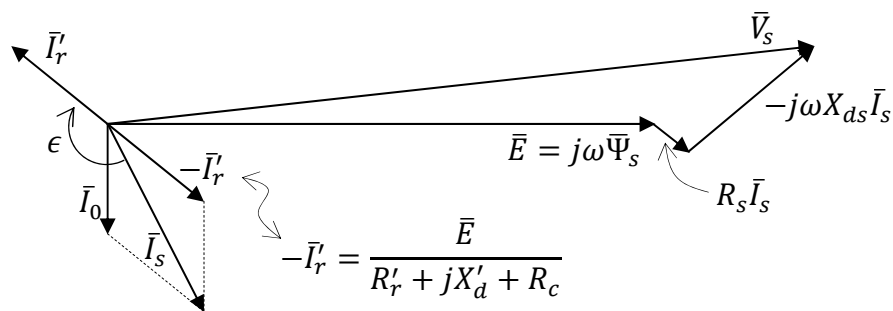
A questo punto, considerando che $\lambda_{rs} = \lambda_{sr}$ e che $\lambda_{ss} \cdot \lambda_{rr} = (\lambda_{sr})^2 = (\lambda_{rs})^2$, si può scrivere:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + jX_{d_s} \bar{I}_s + j\omega \lambda_{ss} (\bar{I}_s + \bar{I}'_r) \\ \bar{V}'_r = (R'_r + jX'_{d_r}) \bar{I}'_r + j\omega \lambda_{ss} (\bar{I}_s + \bar{I}'_r) e^{-j\beta} \end{cases}$$

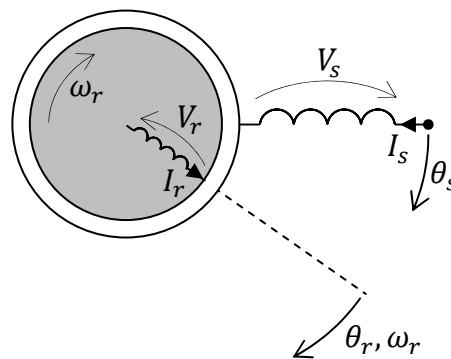
Il termine $e^{-j\beta}$ è stato introdotto solo per motivi storici. Un tempo la macchina asincrona (a rotore bloccato) veniva utilizzata nei laboratori come trasformatore di fase per le tensioni. Variando la posizione angolare del rotore, infatti, si varia la fase del secondario sul primario del trasformatore equivalente. Questo fattore verrà trascurato per i futuri calcoli. Il circuito equivalente a questa equazione, in definitiva, diviene:



Ed è descritto dal seguente diagramma fasoriale:



Questo è il circuito equivalente di una macchina asincrona a rotore bloccato. Vediamo, a questo punto, cosa accade mettendo in rotazione il rotore. Per far ciò è necessario calcolare il flusso che si concatena con il rotore, quando questo ruota a velocità ω_r . Con semplici considerazioni cinematiche è facile dedurre che la velocità del campo magnetico rotante (che ruota con velocità assoluta pari alla frequenza di rete $\frac{\omega}{p}$, dove p il numero di coppie di poli) rispetto al rotore è di $\frac{\omega}{p} - \omega_r$. Al limite (o, meglio, al sincronismo) se $\omega_r = \frac{\omega}{p}$, la fem di rotore è nulla. A questo punto introduciamo due ascisse angolari, come in figura:



Tali che θ_s sia solidale con lo statore, mentre θ_r si solidale con il rotore e che, quindi, tra le due vi sia la relazione

$$\theta_s = \theta_r + \omega_r t$$

Introduciamo, inoltre, una variabile detta scorrimento s , così definita:

$$s = \frac{\omega/p - \omega_r}{\omega/p}$$

Nota: se $s = 1$ la macchina è ferma, se $s = 0$ la macchina è al sincronismo.

Il campo di statore può essere espresso come:

$$B_s(\theta_s, t) = B_{s,max} \sin\left(\frac{\omega t}{p} - \theta\right)$$

Il campo di statore visto dal rotore, invece è pari a:

$$B_s(\theta_r, t) = B_{s,max} \sin\left(\frac{\omega t}{p} - \omega_r t - \theta_r\right)$$

Il flusso di statore concatenato col rotore è dunque pari a:

$$\Psi_{rs} = \lambda_{rs} \sqrt{2} I_s \sin\left(s \frac{\omega}{p} t\right)$$

A questo flusso è associata una fem di rotore pari a :

$$e_{rs} = \frac{d\Psi_{rs}}{dt} = s\omega\sqrt{2}\lambda_{rs}I_s \cos(s\omega t)$$

Questa fem è causa a sua volta di una terna di correnti rotoriche che generano un campo magnetico rotante di rotore, pari a:

$$B_r(\theta_r, t) = B_{r,max} \sin(s\omega t - \epsilon - \theta_r)$$

Il campo di rotore ruota, in genere, a velocità $\frac{s\omega}{p}$ rispetto al rotore, mentre ruota a velocità assoluta (rispetto allo statore) pari a ω . I due campi di rotore e di statore sono quindi isofrequenziali e immobili tra loro. A questo punto è possibile immaginare di chiudere in corto circuito il rotore lasciandolo libero di ruotare, e alimentare lo statore. Le equazioni che descrivono il circuito diventano:

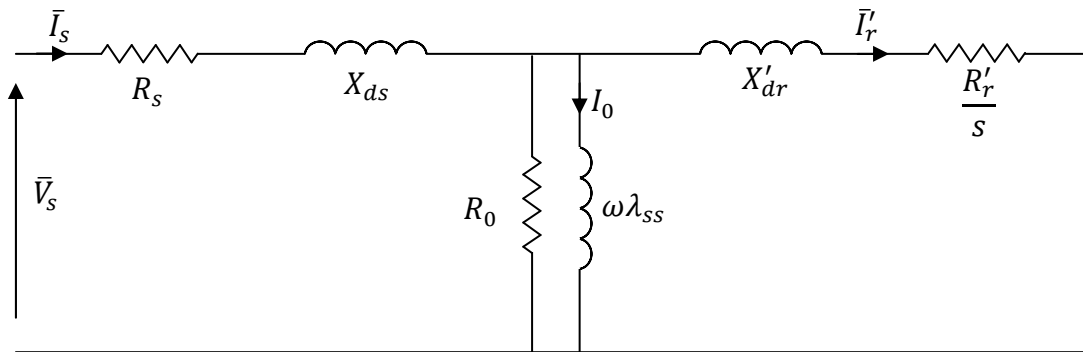
$$\begin{cases} \bar{V}_s = (R_s + jX_{d_s})\bar{I}_s + j\omega\lambda_{ss}\bar{I}_s + j\omega\lambda_{sr}\bar{I}_r \\ 0 = \bar{V}_r = (R_r + jsX_{d_r})\bar{I}_r + js\omega\lambda_{rs}\bar{I}_s + js\omega\lambda_{rr}\bar{I}_r \end{cases}$$

Da notare che \bar{I}_r e \bar{I}_s sono diversi solo per la pulsazione, ma hanno egual modulo.

Dividendo la seconda equazione per s , si ottiene:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = (R_s + jX_{ds})\bar{I}_s + j\omega\lambda_{ss}\bar{I}_s + j\omega\lambda_{sr}\bar{I}_r \\ \left(\frac{R_r}{s} + jX_{dr}\right)\bar{I}_r + j\omega\lambda_{rs}\bar{I}_s + j\omega\lambda_{rr}\bar{I}_r = 0 \end{cases}$$

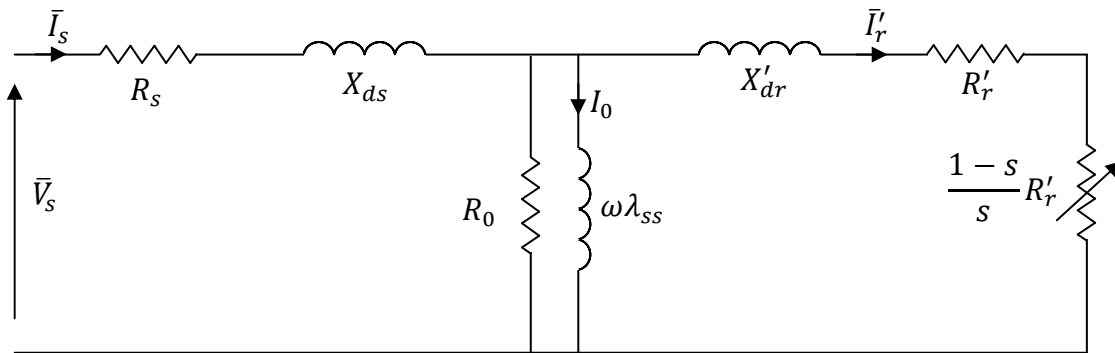
È possibile quindi “accoppiare” i due circuiti (ricordando, però, che le correnti non sono isofrequenziali):



Normalmente si scompone R'_r/s in:

$$\frac{R'_r}{s} = R_r + \rho' = R_r + \frac{1-s}{s}R_r$$

Da cui deriva il **circuito equivalente della macchina asincrona**:



4.3 DIAGRAMMA DELLE PERDITE

È possibile disegnare un efficace diagramma delle perdite della macchina asincrona, utile per mettere in evidenza alcuni aspetti:

La potenza trasferita dallo statore al rotore è detta potenza sincrona.

4.4 CALCOLO DELLA COPPIA ELETTROMAGNETICA

Per calcolare la coppia della macchina si possono utilizzare tre modi diversi:

- Attraverso la sommatoria delle forze che agiscono sul rotore ($F = BiL$), da cui la coppia è pari a $C = \sum_{rotore} r \cdot F = \sum(rBiL)$;
- Attraverso il teorema dei lavori virtuali come $Cd\epsilon = \frac{dW}{d\epsilon} d\epsilon$;
- Attraverso un bilancio energetico.

Per calcolare la coppia seguiremo l'ultima opzione, quella di bilancio energetico. Con riferimento al diagramma delle perdite della macchina possiamo scrivere:

$$P = V_s I_s \cos \varphi_s = P_{J,s} + P_{J,r} + P_{mecc} + P_{fe} + P_{a,v}$$

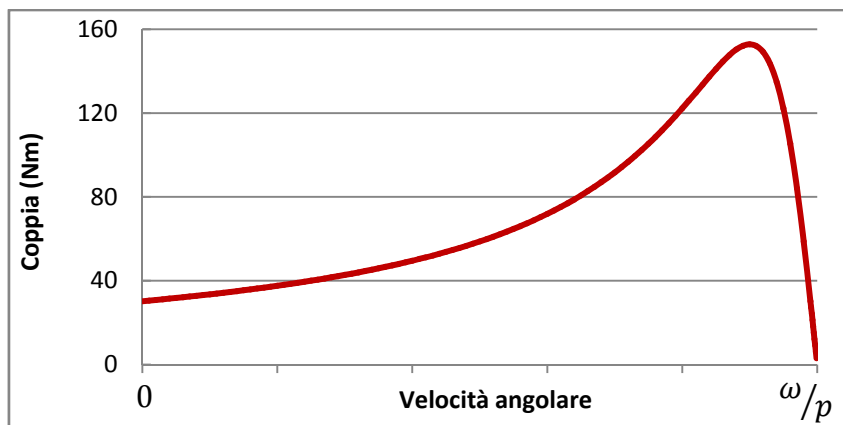
La potenza meccanica è associata alla resistenza variabile ρ' :

$$P_{mecc} = 3 \frac{1-s}{s} R'_r (I'_r)^2 = C \cdot \omega_r = C(1-s) \frac{\omega}{p}$$

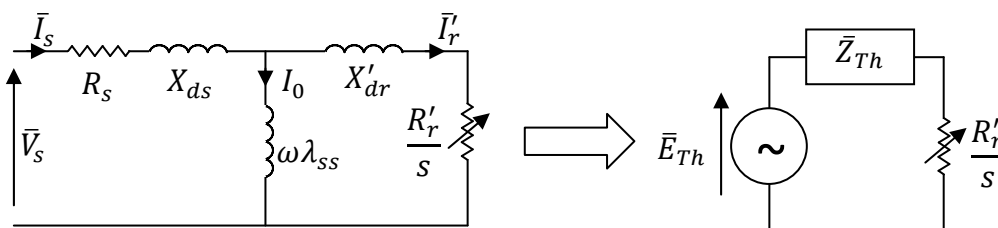
Da cui:

$$C = \frac{3p R'_r}{\omega s} (I'_r)^2$$

La coppia in funzione della velocità angolare ha il seguente andamento:



Ritenendo trascurabile la resistenza di statore, calcoliamo la coppia. Trasformiamo il seguente circuito con Thevenin:



Avendo trascurato R_s risulterà che $\bar{Z}_{Th} \equiv jX_{Th}$, per cui la corrente nella maglia è esprimibile come:

$$|\bar{I}_r| = \frac{E_{Th}}{\sqrt{\left(\frac{R'_r}{s}\right)^2 + X_{Th}^2}}$$

Dove

$$E_{Th} = V_s \frac{\omega \lambda_{ss}}{X_{d_s} + \omega \lambda_{ss}} = k \cdot V_s$$

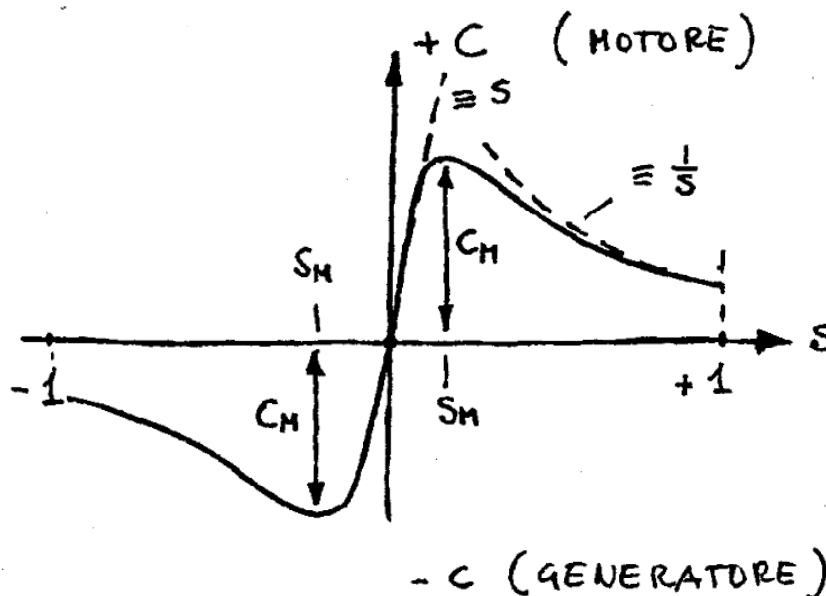
e

$$X_{Th} = X'_{d_r} + \frac{X_{d_s} \lambda_{ss} \omega}{\underbrace{X_{d_s}}_{\text{trascurabile}} + \lambda_{ss} \omega} \cong X'_{d_r} + X_{d_s} \cong X_{cc}$$

In definitiva, la coppia, è esprimibile come:

$$C = \frac{3p R'_r}{\omega s} \frac{(k \cdot V_s)^2}{\left(\frac{R'_r}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}$$

In questo modo è più evidente la costruzione di $C(s)$, considerando che per $s \rightarrow 0$ la curva è una retta con pendenza proporzionale a R'_r , mentre per $s \rightarrow 1$ la curva è un'iperbole equilatera:



Lo scorrimento per cui si ha la coppia massima (trovato imponendo $\frac{\partial C}{\partial s} = 0$) vale:

$$s_{max} = \frac{R'_r}{X_{Th}}$$

E la coppia massima vale:

$$C(s_{max}) = \frac{3p (k \cdot V_s)^2}{\omega \cdot 2X_{Th}}$$

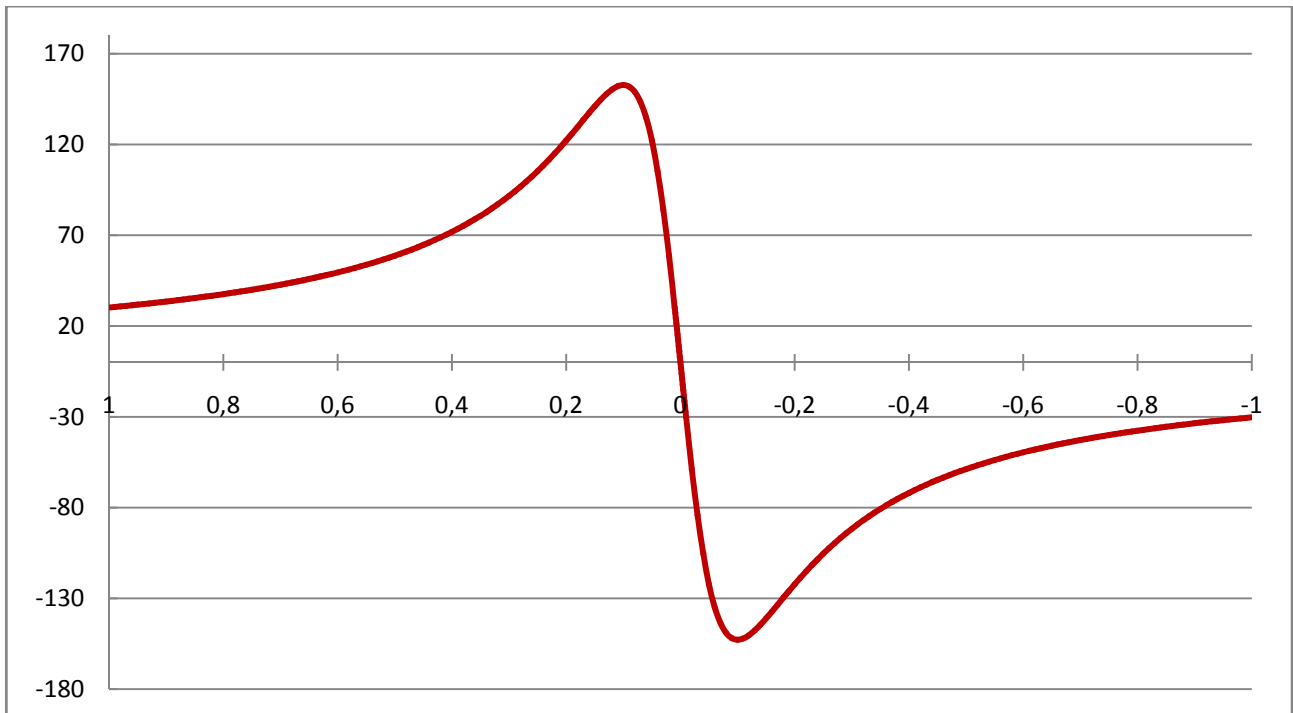
Da questa espressione è evidente che la coppia massima non dipende dalla R'_r , ma soltanto dalla $X_{Th} \cong X_{cc}$. Per questo motivo, in teoria, una minore X_{cc} sarebbe l'ideale per avere un motore con molta coppia. Tuttavia la X_{cc} influenza anche la corrente di spunto, infatti:

$$\bar{I}_{spunto} = \frac{\bar{V}_s}{X_{cc}}$$

Quindi non si può scendere troppo con la reattanza di corto circuito per evitare dei picchi di corrente allo spunto troppo elevati. Queste considerazioni rientrano nel più grande problema dell'avviamento della macchina asincrona, di cui si discuterà in seguito.

4.5 FRENATURA – FUNZIONAMENTO DA GENERATORE

Nel funzionamento da motore, potrebbe succedere che la velocità del rotore superi quella del campo magnetico rotante (per esempio per una improvvisa riduzione della coppia di carico). In questo caso risulta $\omega_r > \omega/p$, quindi lo scorrimento diventa negativo. La coppia elettromagnetica, che prima costituiva la coppia motrice, adesso diventa una coppia frenante, il motore assorbe potenza all'albero e la immette nella rete a cui è collegato. È possibile tracciare l'andamento della coppia per scorrimenti negativi (ovvero per $\omega_r > \omega/p$), che ha un andamento tipo il seguente:



È evidente, a questo punto, che anche la macchina asincrona (come tutte le macchine elettriche) è reversibile collegandola ad un motore primo, è in grado di fornire una coppia elettromagnetica resistente e di generare energia elettrica da immettere in rete attraverso il circuito di statore.

4.6 DIAGRAMMA CIRCOLARE DEL MOTORE ASCINRONO

Il diagramma circolare è uno strumento che può essere utilizzato per determinare le prestazioni della macchine in ogni condizione di lavoro. Per tracciare questo diagramma si rappresenta su un diagramma fasoriale la tensione di alimentazione stellata $\frac{\bar{V}}{\sqrt{3}}$ e le corrispondenti correnti a vuoto \bar{I}_0 e correnti di corto circuito \bar{I}_{cc} , per cui valgono le relazioni:

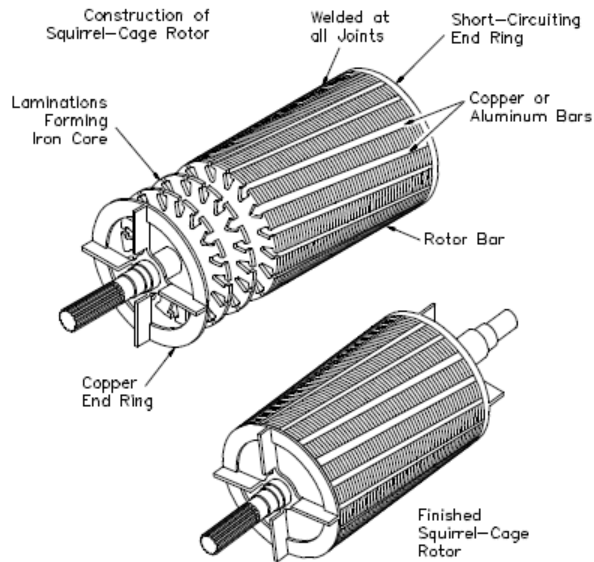
$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{V}}{\sqrt{3}\bar{Z}_0}; \quad \bar{I}_{cc} = \frac{\bar{V}}{\sqrt{3}\bar{Z}'_{cc}}$$

[img]

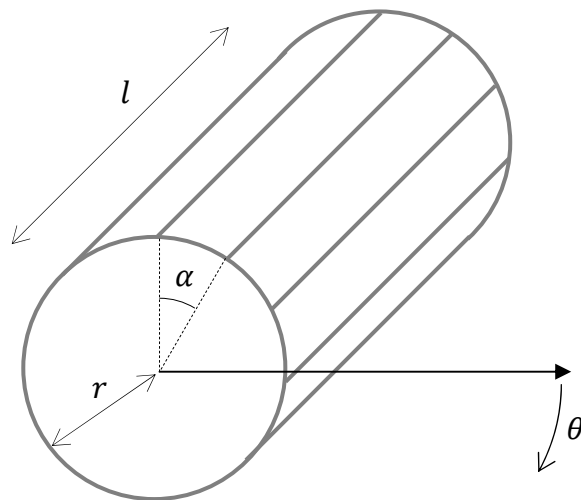
I punti S_0 ed S_1 caratterizzano le condizioni di funzionamento limite della macchina rispettivamente per scorrimento $s = 0$ ed $s = 1$.

4.7 ROTORE A GABBIA DI SCOIATTOLO

Una particolare forma costruttiva del rotore è il cosiddetto rotore a gabbia di scoiattolo. In questa realizzazione i conduttori delle cave vengono uniti e cortocircuitati da due anelli posti alle estremità del rotore stesso. Costruttivamente vengono utilizzati, al posto dei conduttori, delle sbarre (di alluminio o rame, tipicamente) poste nelle cave o direttamente fuse in esse.



Per studiare questo particolare tipo di macchina si fa ricorso alla teoria dei sistemi polifase. Consideriamo una figura come la seguente:



In cui il valore di α è pari a

$$\alpha = \frac{2\pi}{N_r}$$

Con N_r numero delle sbarre, un numero pari. Ipotizzando la presenza di un campo magnetico B_s posto nella consueta forma:

$$B_s(\theta, t) = B_{s,max} \sin(\omega t - \theta)$$

È possibile calcolare le forze elettromotrici agenti sui singoli conduttori della gabbia (le sbarre) come:

$$e_1 = B l \cdot v = B_{s,max} l \omega r \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = E_{max} \cos(\omega t)$$

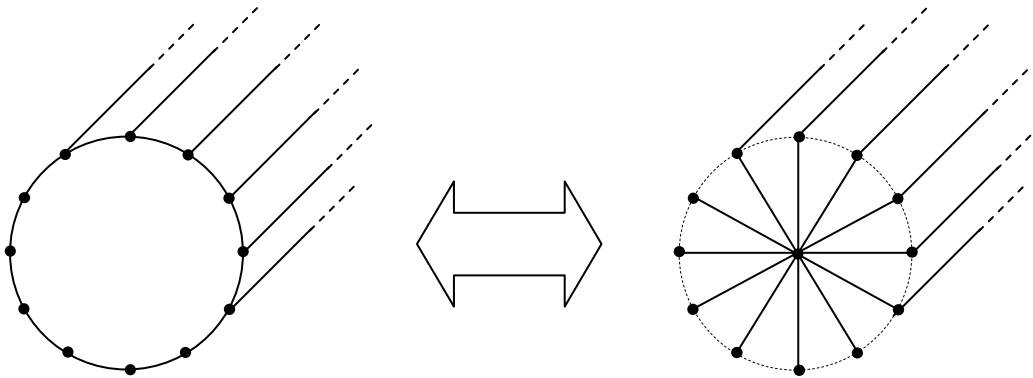
$$e_2 = E_{max} \cos(\omega t - \alpha)$$

$$e_3 = E_{max} \cos(\omega t - 2\alpha)$$

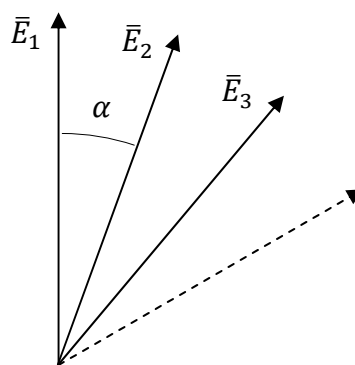
E così via. Il sistema ottenuto è un sistema polifase con $N_r/2$ fasi. La k-esima fem è pari a:

$$e_k = E_{max} \cos\left[\omega t - (k - 1) \frac{2\pi}{N_r}\right]$$

Il collegamento dell'anello di chiusura è poligonale. È possibile quindi trasformare idealmente questi collegamenti con collegamenti equivalenti a stella (trasformazione da poligono a stella):



La rappresentazione fasoriale della fem diviene:



In queste ipotesi esiste un sistema polifase di correnti tipo:

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2} I_r \cos(\omega t - \varphi_r) \\ i_2 = \sqrt{2} I_r \cos(\omega t - 2\varphi_r) \\ i_3 = \sqrt{2} I_r \cos(\omega t - 3\varphi_r) \\ \vdots \\ i_n = \sqrt{2} I_r \cos(\omega t - n\varphi_r) \end{cases}$$

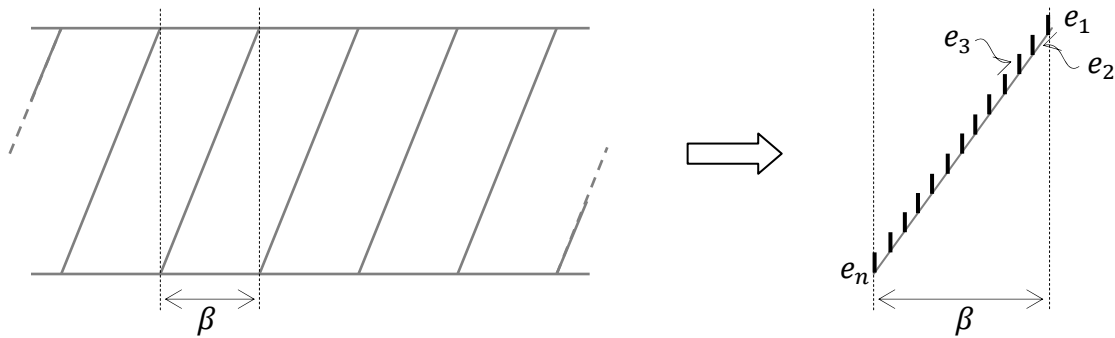
Queste correnti danno luogo, in analogia a quanto già visto per il sistema trifase, ad un campo magnetico rotante di rotore, del tipo:

$$B_r(\theta, t) = \frac{N_r}{2} \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{I_r}{2\delta} \sin(\omega t - \theta)$$

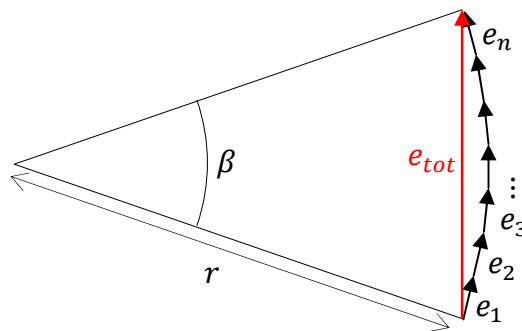
Il coefficiente di induzione statore-rotore diviene:

$$\lambda_{sr} = \frac{2m}{\pi} \mu_0 \frac{L\tau}{\delta} (n_s q_s K_{d_s} K_{p_s})$$

Nella realtà costruttiva le sbarre della gabbia non vengono disposte parallelamente all'asse di rotazione del rotore, bensì lievemente inclinate. Questo per evitare problemi di impuntamento all'avvio. Per analizzare l'effetto di questa inclinazione è possibile, con riferimento alla figura sottostante, dividere la sbarra inclinata in tanti piccoli pezzi paralleli all'asse:



in questo modo la fem totale risulta inferiore rispetto a quella che sarebbe stata prodotta da una sbarra parallela all'asse. Si può rappresentare fasorialmente tale somma:



per tener conto di questo fenomeno si introduce un rapporto di inclinazione K_i definito come:

$$K_i = \frac{\text{corda}}{\text{arco}}$$

Ossia, analiticamente:

$$K_i = \frac{2r \sin(\beta/2)}{\beta/r} = \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$

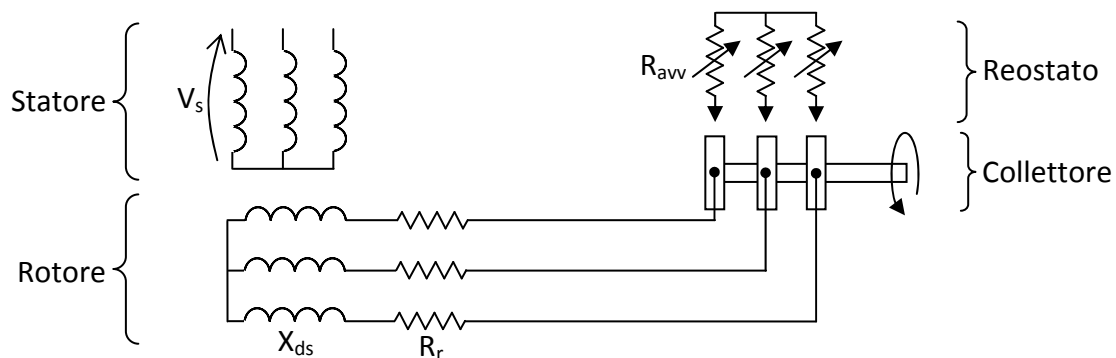
4.8 AVVIAMENTO DELLA MACCHINA

L'avviamento della macchina rappresenta un problema per due motivi:

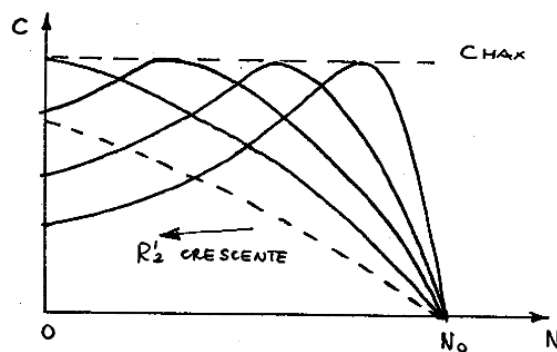
- La corrente di spunto è molto grande, fino a 8 volte la corrente nominale. Questa corrente potrebbe far scattare gli interruttori di protezione.
- La coppia di spunto è relativamente bassa. Ciò significa che potrebbero verificarsi condizioni in cui la macchina non riesce a superare la coppia resistente, portandosi a lavorare a scorrimento unitario. Se, in queste condizioni, gli interruttori di protezione non intervenissero, la macchina subirebbe ingenti danni dovuti alle elevate correnti.

La soluzione a questo problema dipende innanzi tutto dal tipo di collegamento del rotore. Nelle **macchine a rotore avvolto** si può utilizzare un **reostato di avviamento**.

Consideriamo uno schema di collegamento come il seguente:



È possibile tracciare i grafici della coppia in funzione della resistenza (totale) di rotore:



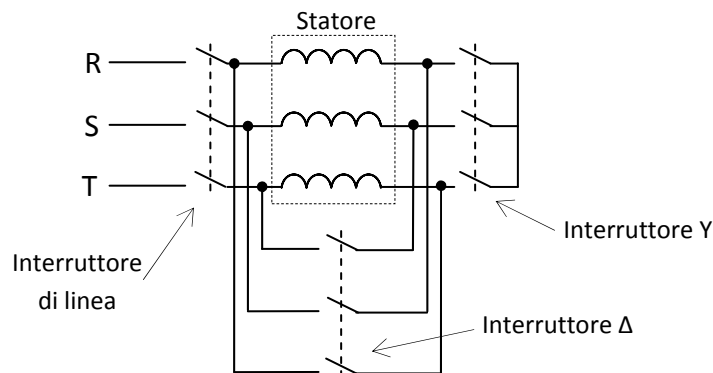
È evidente quindi, che una elevata resistenza allo spunto risolve sia i problemi di corrente che di coppia. Tuttavia, a regime, una elevata resistenza è dannosa, sia perché abbassa il rendimento di rotore (e quindi dell'intera macchina), sia perché riduce notevolmente la coppia. Si può quindi usare un reostato di avviamento, in grado di variare in modo discreto la resistenza di rotore, ottenendo un avviamento quasi ottimale. In particolare, se si porta la macchina a lavorare nella condizione in cui:

$$R_r' + R_{avv}' = X_{Th}$$

Si ottiene la coppia massima in corrispondenza di $s = 1$.

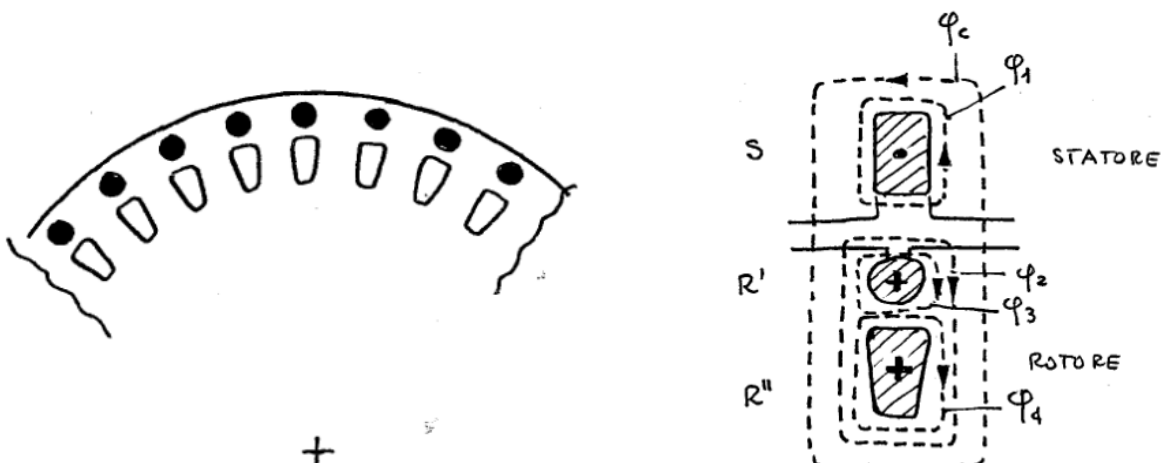
Alternativamente al reostato di avviamento, che realizza un avviamento assai dissipativo, è possibile utilizzare un **convertitore elettronico di potenza** in grado di comandare una corrente di rotore in fase con la tensione (quindi per il rotore è come avere connessa una resistenza) e di re immettere l'energia così assorbita in rete, senza dissipare nulla, ed ottenendo, inoltre, una curva di coppia ottimale, essendo la regolazione praticamente continua e non più discreta.

Nella **macchina a gabbia di scoiattolo**, invece, non si ha il diretto controllo della resistenza. Per supplire al problema dell'avviamento si può adottare un avviamento chiamato **stella-triangolo**. Si realizza uno schema elettrico come il seguente:



Progetta la macchina in modo tale da poter effettuare un avviamento a stella, in modo che, sui singoli avvolgimenti statorici, insista la tensione di fase che inferiore di $\sqrt{3}$ volte rispetto alla tensione concatenata. Ad avviamento effettuato, per mezzo di interruttori a contattori, si commuta la connessione a stella in una connessione a triangolo, per funzionare a regime. Questa tecnica, pur riducendo la corrente di avviamento di un fattore 3 (!corrente di linea, non di fase! $\{I_{l1} = \sqrt{3}I_{f1}; I_{l2} = I_{f2} = \frac{I_{f1}}{\sqrt{3}}\} \rightarrow \frac{I_{l1}}{I_{l2}} = 3$), riduce anche la coppia di spunto di un fattore 3. È pertanto possibile solamente se la macchina non è inizialmente accoppiata ad un carico, o è accoppiata ad un carico molto basso.

Due soluzioni costruttive al problema dell'avviamento della macchina a gabbia di scoiattolo, sono i cosiddetti motori a **doppia gabbia** ed a **cave profonde**. Nel rotore a doppia gabbia si realizzano due gabbie concentriche, in questo modo:

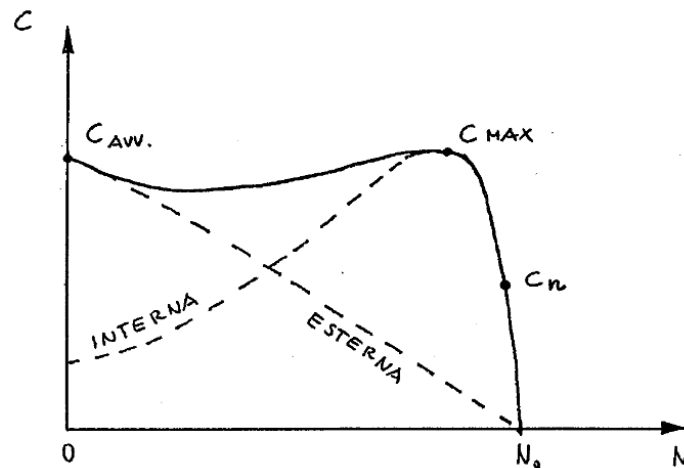


Queste gabbie sono tali che la resistenza della gabbia esterna sia maggiore di quella interna. La loro disposizione, invece, fa sì che la reattanza di dispersione della gabbia esterna sia inferiore a quella della gabbia interna:

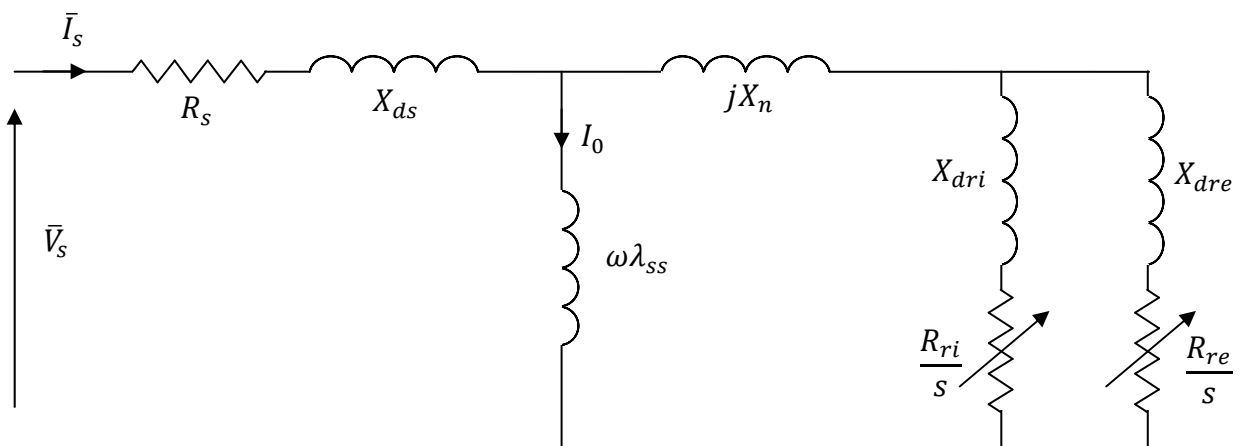
$$R_{re} \gg R_{ri}$$

$$X_{dre} \ll X_{dri}$$

All'avviamento lo scorrimento è pari ad uno, e la frequenza delle correnti di rotore è prossima alla frequenza delle correnti di statore (di rete). In queste condizioni la reattanza domina sulla resistenza, quindi la corrente tende a scorrere dove la reattanza è minore, ossia sulla gabbia esterna (caratterizzata quindi da una resistenza maggiore). A regime lo scorrimento è prossimo allo zero e i termini resistivi prevalgono su quelli reattivi, ridotti di molto per via del fatto che la frequenza delle correnti rotoriche è divenuta molto piccola. Quindi la corrente tende a scorrere sulla gabbia interna, caratterizzata da una resistenza piccola. In questo modo si ottiene un diagramma di coppia siffatto:

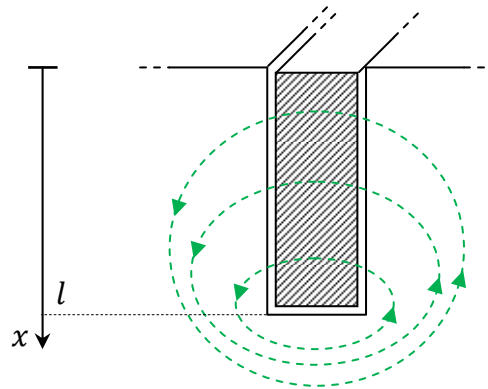


Il circuito equivalente della macchina a doppia gabbia è il seguente:

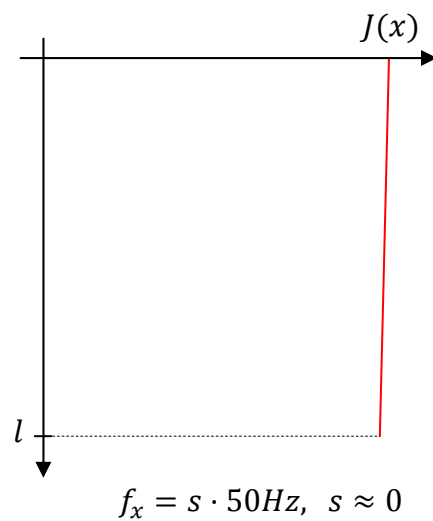
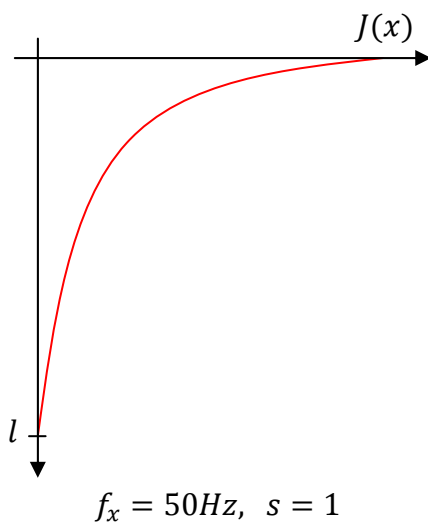


L'elemento induttivo jX_n è stato aggiunto per tener conto delle linee di campo che si richiudono in entrambe le gabbie.

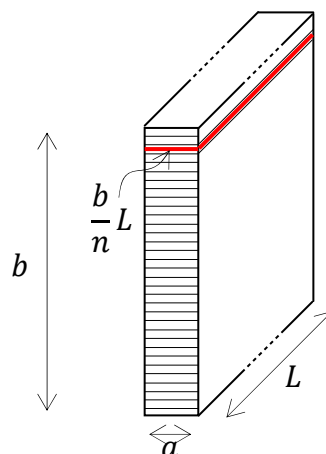
Come già detto, una ulteriore soluzione al problema (derivata grossomodo dalla doppia gabbia) è la soluzione con gabbia con cave profonde. Si realizzano delle cave più profonde rispetto a quelle normali, come in figura:



Nella parte inferiore si concatena con un flusso di dispersione maggiore. La densità di corrente $J(x)$ allo spunto e in prossimità del sincronismo hanno un andamento tipo:



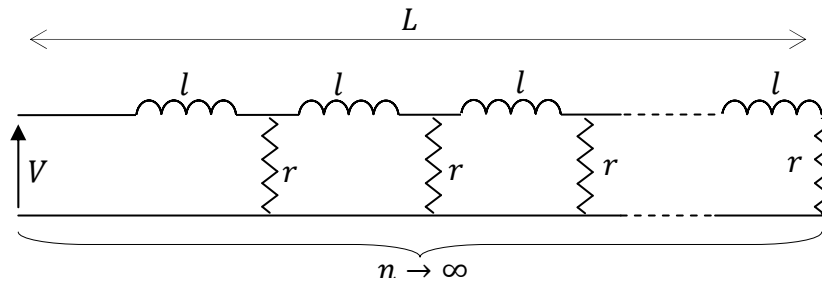
Per analizzare questa tipologia di motore, posso ricorrere alla teoria delle linee a costanti distribuite. Si divide la sbarra in n lamine:



Ogni lamina ha una resistenza ed una riluttanza pari a:

$$R = \rho \frac{L}{ab} n; \quad \mathcal{R} = \frac{1}{\mu_0} \frac{a}{Lb} (n - 1);$$

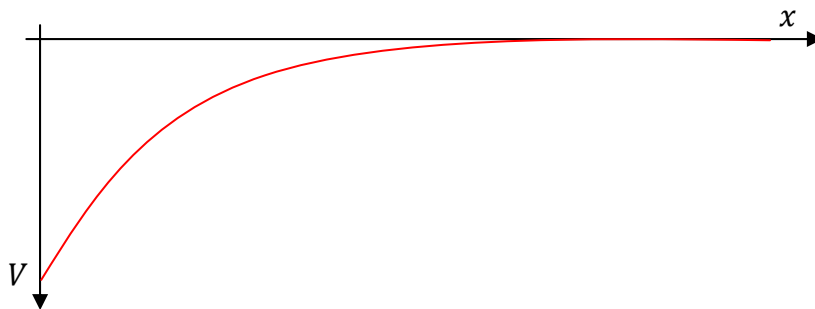
lo schema elettrico equivalente è del tipo:



posso scrivere la resistenza, la conduttanza e la permeanza per unità di lunghezza:

$$r = \rho \frac{L}{a} \rightarrow g = \frac{1}{\rho} \frac{a}{L}; \quad l = \frac{\mu_0 L}{a};$$

la caduta di tensione si concentra nella parte iniziale della sbarra:



a questo punto si determinano \bar{Z}_c e $\bar{\gamma}$, come:

$$\bar{Z}_c = \sqrt{\frac{\bar{Z}_e}{\bar{Y}_e}}$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{Z}_e \bar{Y}_e} = \sqrt{j\omega \frac{\mu_0 L}{a} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{a}{L}} = \sqrt{j\omega \frac{\mu_0}{\rho}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\rho}}$$

Da notare che la quantità $\sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\rho}}$ è proprio la profondità di propagazione (per effetto pelle). Si calcola ora la $\bar{Z}_i =$

$$\bar{Z}_i = \frac{\bar{Z}_c}{\tanh(\bar{\gamma} b)}$$

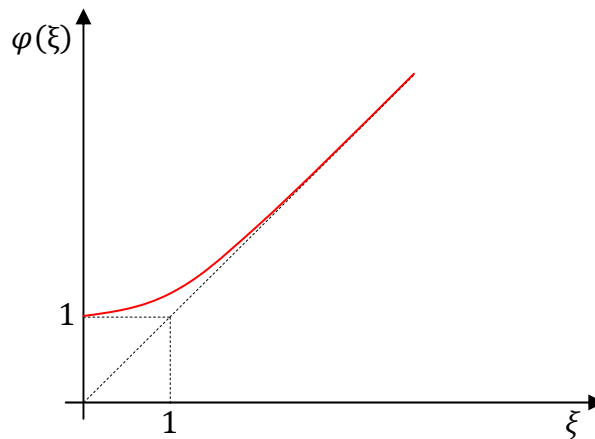
Attraverso passaggi mistici che noi comuni mortali non possiamo far altro che ammirare estasiati, si giunge ad una formula:

$$\bar{Z}_i = \frac{\rho L}{ab} \cdot \varphi(\xi) + jX_{dr} \Psi(\xi)$$

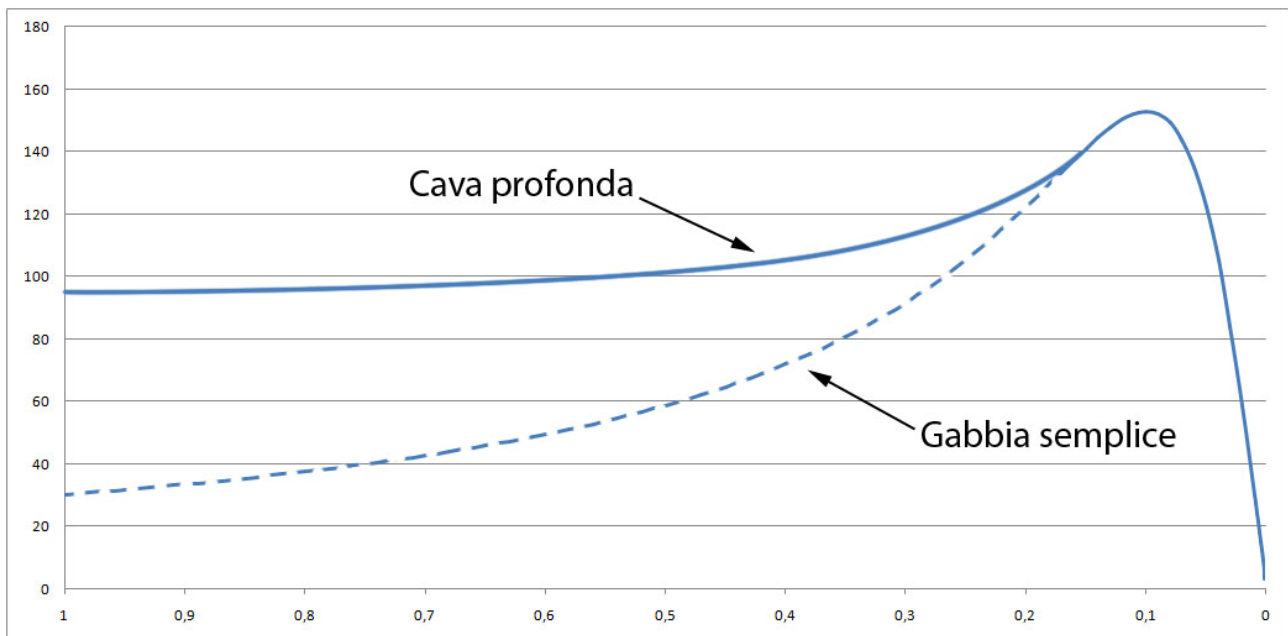
Dove

$$\varphi(\xi) = \xi \frac{\sinh(2\xi) + \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}$$

che, graficata, ha un andamento tipo:

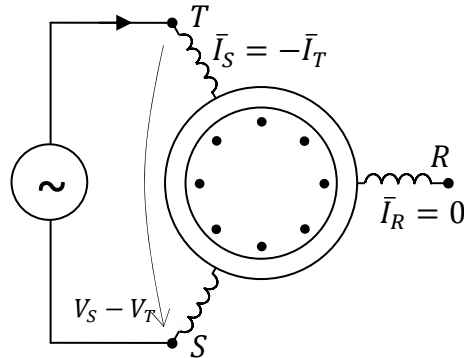


questa soluzione costruttiva trasforma il diagramma di coppia nel seguente modo:

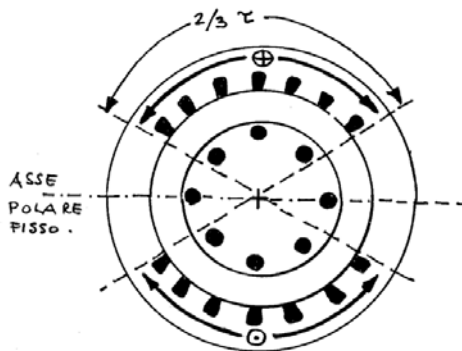


4.9 MOTORE ASINCRONO MONOFASE

È possibile utilizzare un motore asincrono trifase, con un'alimentazione monofase effettuando un collegamento tipo:



E collegando tra la fase R ed un'altra fase un condensatore di avviamento. Tuttavia, per potenze comprese tra la decina di Watt e alcuni kW (un range tipico degli elettrodomestici), si realizza un motore monofase siffatto:



Il motore monofase è simile a quello trifase, ma l'avvolgimento (monofase) di statore è distribuito su 120° . È possibile studiare il motore come fosse un motore trifase in regime dissimetrico.

$$\begin{cases} \bar{V}_R = \bar{V}_d + \bar{V}_i + \bar{V}_0 \\ \bar{V}_S = \alpha^2 \bar{V}_d + \alpha \bar{V}_i + \bar{V}_0 \\ \bar{V}_T = \alpha \bar{V}_d + \alpha^2 \bar{V}_i + \bar{V}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{I}_R = \bar{I}_d + \bar{I}_i + \bar{I}_0 \\ \bar{I}_S = \alpha^2 \bar{I}_d + \alpha \bar{I}_i + \bar{I}_0 \\ \bar{I}_T = \alpha \bar{I}_d + \alpha^2 \bar{I}_i + \bar{I}_0 \end{cases}$$

Per trovare l'impedenza equivalente si applica:

$$\bar{V} = \bar{Z}_{eq} \cdot \bar{I}_S$$

Considerando che $\bar{I}_0 = 0$, $\bar{I}_R = 0 \rightarrow \bar{I}_i = -\bar{I}_d$, la \bar{I}_S è pari a:

$$\bar{I}_S = (\alpha^2 - \alpha) \bar{I}_d = (\alpha - \alpha^2) \bar{I}_i$$

Mentre la \bar{V} è pari a:

$$\bar{V} = \bar{V}_S - \bar{V}_T = (\alpha^2 - \alpha) \bar{V}_d + (\alpha - \alpha^2) \bar{V}_i$$

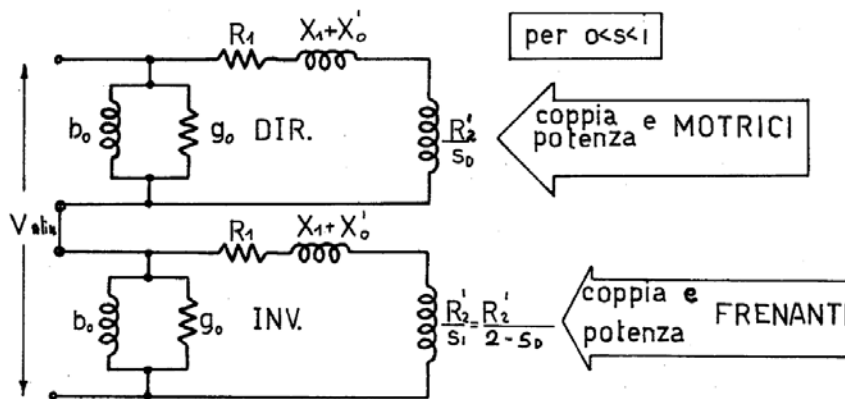
Da cui la \bar{Z}_{eq} :

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{\bar{V}_d}{\bar{I}_d} + \frac{\bar{V}_i}{\bar{I}_i}$$

La corrente inversa genera un campo magnetico rotante diretto in senso opposto, quindi si può individuare uno “scorrimento inverso”:

$$s_i = \frac{\omega/p + \omega_r}{\omega/p} = 2 - s$$

Il circuito equivalente di macchina è quindi il seguente:



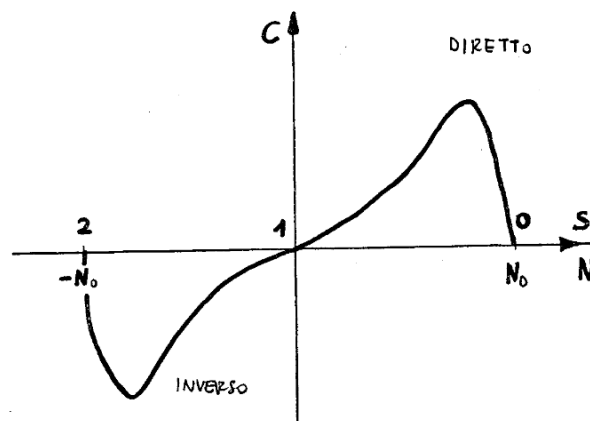
Si può calcolare la coppia come:

$$C = \frac{p}{\omega} \left(\frac{R'_r}{s} I_{rd}^2 - \frac{R'_r}{2-s} I_{ri}^2 \right)$$

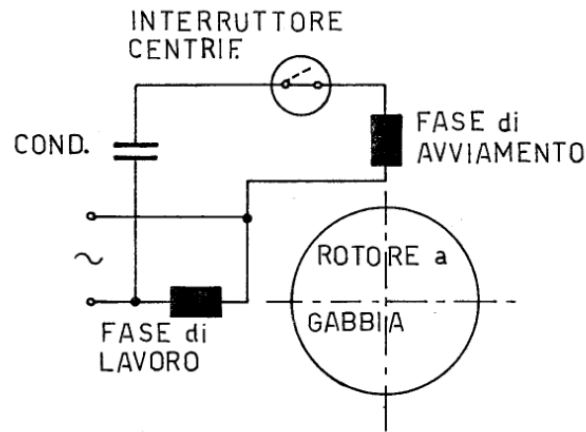
Ovvero, utilizzando lo scorrimento inverso s_i :

$$C = \frac{p}{\omega} \left(\frac{R'_r}{s} I_{rd}^2 - \frac{R'_r}{s_i} I_{ri}^2 \right)$$

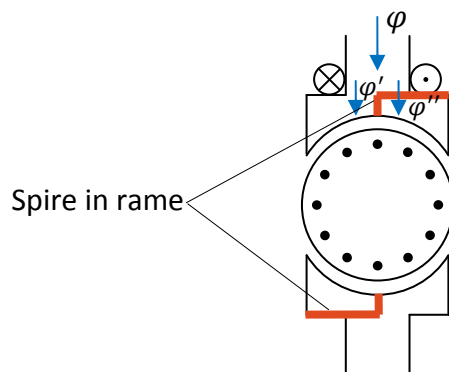
In questo modo si può vedere la caratteristica di coppia come la differenza di due caratteristiche di due macchine, con scorrimento s e $2 - s$, che ha un andamento tipo:



Come si vede, la coppia allo spunto è nulla. Ciò significa che la macchina non è auto avviante. Per garantire l'avviamento della macchina si può connettere il terzo avvolgimento all'alimentazione per mezzo di un condensatore, che introduce lo sfasamento necessario a garantire l'avvio. Questo trasformatore può essere successivamente disinserito per mezzo di un interruttore centrifugo, in un circuito tipo il seguente:



Un'altra modalità costruttiva dei motori asincroni monofase che risolve il problema dell'avviamento è il cosiddetto "motore a poli schermati":



I flussi φ' e φ'' sono sfasati per la presenza della spira di rame (che è sede di correnti indotte che generano un flusso che si va a sommare a quello globale). Lo sfasamento tra questi due flussi consente di avere una coppia di spunto sufficiente ad avviare la macchina. Una simile costruzione, ovviamente, realizza una trasformazione elettromeccanica poco efficiente e molto "sporca". per questo si usa solo per motori di piccola potenza ($< 100 W$) per elettrodomestici.

CAPITOLO 5

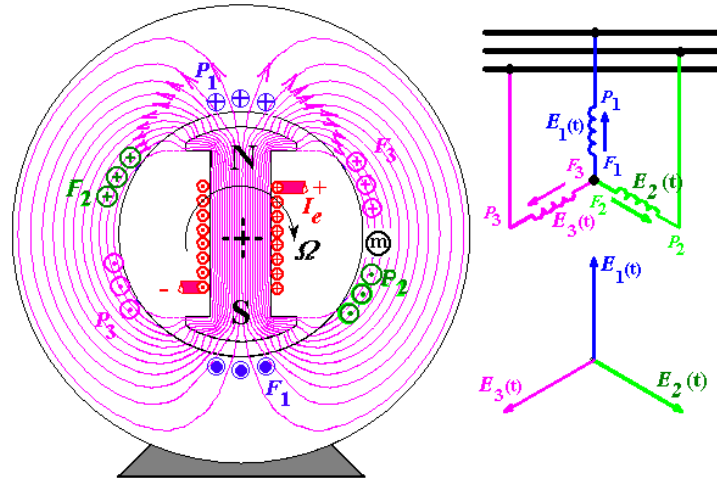
MACCHINA SINCRONA

5.1 GENERALITÀ SULLA MACCHINA SINCRONA

Qwerty

5.2 DEDUZIONE DEL CIRCUITO EQUIVALENTE – MODELLO DI BEHN-ESCHEMBURG

Una macchina sincrona è una macchina elettrica che ruota rigidamente alla velocità di sincronismo. Lo schema tipico della macchina è il seguente:



Il circuito di induzione è posto sul rotore. Per addurre la corrente al rotore sono necessari anelli e spazzole. La macchina sincrona è quindi più grande e complicata, rispetto alla macchina asincrona. L'uso principale della macchina è di generatore, con tagli fino a 10^3 MW.

La tensione di statore (che chiameremo semplicemente \bar{V}) è pari a:

$$\bar{V} \equiv \bar{V}_s = (R_s + jX_{ds})\bar{I}_s + j\omega\lambda_{ss}\bar{I}_s + j\omega\bar{\Psi}_{sr}$$

La principale differenza rispetto ad una macchina asincrona è il termine $\bar{\Psi}_{sr}$. Vediamo quanto vale. Il campo magnetico B_r è pari a:

$$B_r(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{I_r}{2\delta} \sum_h \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos(2h+1)(\theta - \omega_r t)$$

Considerando solo la prima armonica è facile capire che il flusso concatenato è pari a:

$$\bar{\Psi}_{sr} = KI_r \sin(\omega_r t)$$

Dove K è un coefficiente che racchiude tutte le costanti che provengono dall'espressione di B_r e dalle successive derivate e operazioni necessarie per giungere all'espressione del flusso concatenato. La tensione \bar{V} è pari, quindi, a:

$$\bar{V} = (R_s + jX_{ds} + j\omega\lambda_{ss})\bar{I}_s + \bar{E}_0$$

Dove il termine \bar{E}_0 rappresenta la fem indotta a vuoto:

$$\bar{E}_0 = j\omega\lambda_{sr}\bar{I}_e$$

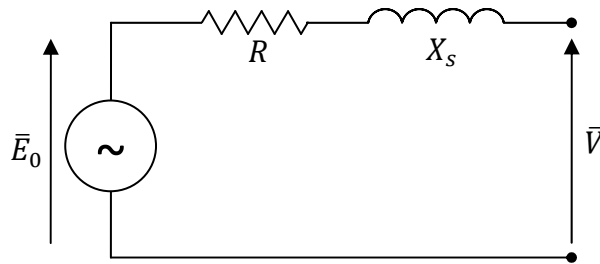
La corrente di eccitazione I_e è naturalmente una corrente continua, ma è indicata con simbolo di fasore in quanto dà luogo ad un flusso variabile nel tempo. Chiamando con il termine di reattanza sincrona la quantità:

$$X_s = X_{ds} + \omega \lambda_{ss}$$

È possibile scrivere la \bar{V} come:

$$\bar{V} = (R_s + jX_s)\bar{I}_s + \bar{E}_0$$

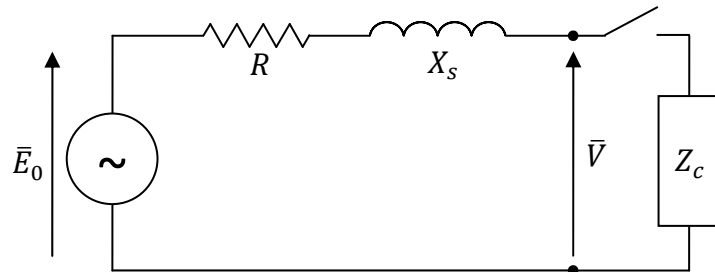
Questa semplificazione porta al cosiddetto modello di Behn-Eschemburg della macchina sincrona, riportato di seguito:



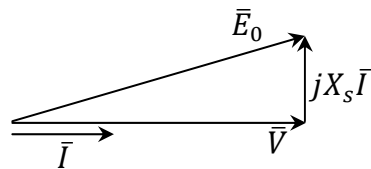
La reattanza sincrona non è naturalmente una reattanza costante. Tuttavia, per studiare il regime permanente in cui la ω si mantiene pressoché fissa è più che sufficiente.

5.3 CONDIZIONI DI FUNZIONAMENTO TIPICHE

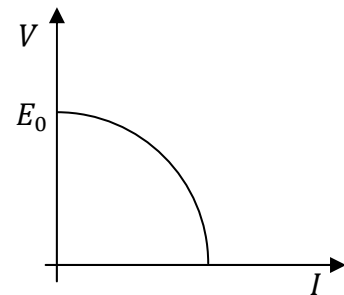
Considerando la macchina collegata ad un motore primo a velocità di rotazione costante $\omega_r = \frac{\omega}{p}$, possiamo individuare tre condizioni di funzionamento, a seconda dell'impedenza Z_c su cui è chiusa la macchina:



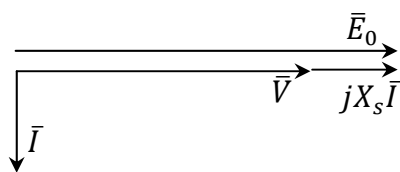
1. Macchina chiusa su un'impedenza puramente resistiva, $Z_c = R_c$:



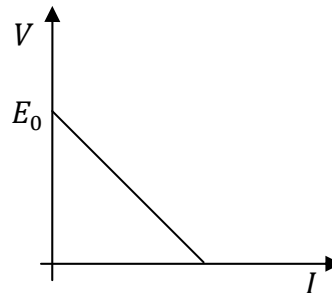
$$I_e = \text{cost} \rightarrow E_0 = \text{cost} \rightarrow E_0^2 = (X_s I)^2 + V^2$$



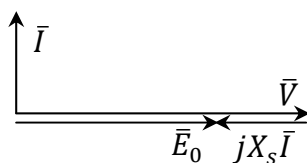
2. Macchina chiusa su un'impedenza puramente induttiva, $Z_c = j\omega L$:



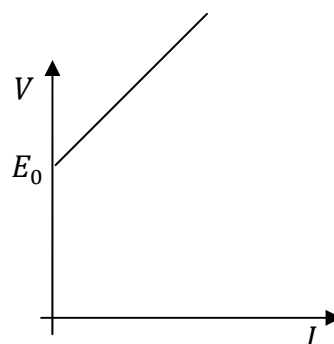
$$V = E_0 - X_s I$$



3. Macchina chiusa su un'impedenza puramente capacitiva, $Z_c = -\frac{j}{\omega C}$:



$$V = E_0 + X_s I$$

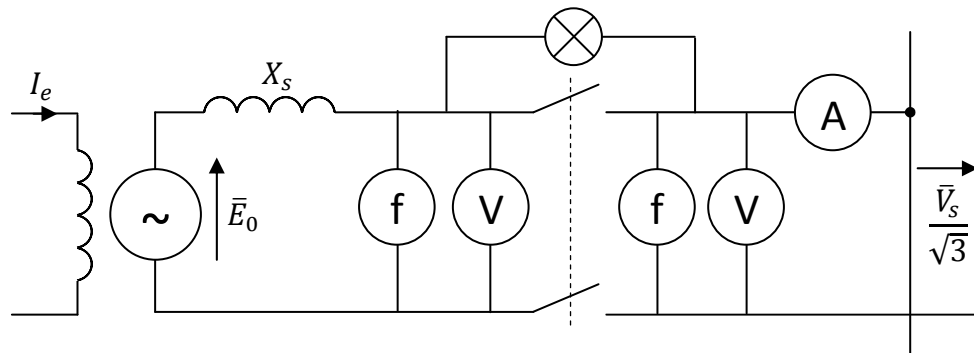


5.4 MANOVRA DI PARALLELO

La manovra di parallelo è quell'operazione necessaria per collegare un generatore sincrono ad una rete di potenza infinita, ovvero una rete con le seguenti caratteristiche:

- Frequenza costante e stabile
- Tensione costante e indipendente dal carico

Supponiamo quindi di voler connettere il generatore sincrono alla suddetta rete e di disporre di una strumentazione di manovra come riportato in figura:



La manovra procede come segue:

- 1) Si pone in rotazione la macchina a vuoto, alla velocità di sincronismo
- 2) Si controlla che la frequenza di rete sia uguale alla frequenza di \bar{E}_0
- 3) Per evitare forti transitori di corrente è necessario controllare che

$$\bar{E}_0 = j\omega \bar{\Psi}_{se} = \frac{|\bar{V}_s|}{\sqrt{3}}$$

ed inoltre è necessario che le fasi della tensione di rete e della \bar{E}_0 siano uguali:

$$\angle \bar{E}_0 = \angle \bar{V}_s$$

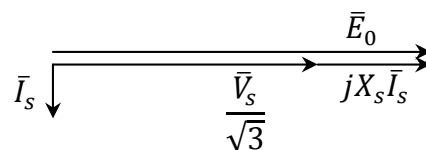
l'informazione relativa allo sfasamento è ottenuta tramite uno strumento apposito

- 4) Verificare la sequenza delle fasi tramite l'osservazione delle lampadine poste sulle fasi
- 5) Chiudere gli interruttori

Terminata la manovra ci si trova connessi alla rete.

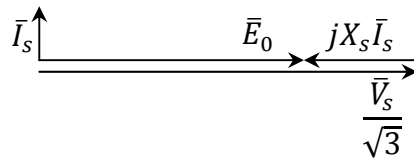
NOTA: la trattazione che segue utilizza la convezione dei generatori.

Se si aumenta \bar{E}_0 (aumentando la corrente di eccitazione) si provoca la circolazione di una corrente statorica e la macchina entra in **sovraeccitazione**:



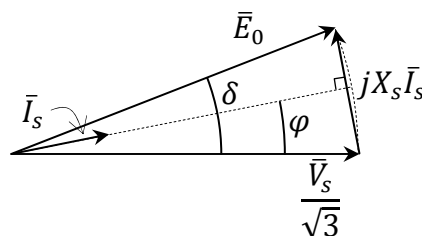
In tali condizioni il generatore sincrono non scambia potenza attiva, tuttavia eroga una potenza reattiva. In questo modo la macchina funziona come **condensatore rotante**.

Nel caso in cui si diminuisce la corrente di eccitazione (diminuendo quindi la \bar{E}_0), la macchina entrerebbe in **sottoeccitazione**:



In queste condizioni la potenza attiva erogata dalla macchina è sempre nulla, ma la macchina assorbe potenza reattiva, comportandosi da induttanza. Si dice che la macchina funziona da **compensatore sincrono**.

Vediamo ora cosa accade quando si fornisce potenza attiva alla macchina mediante un aumento di coppia della turbina. Ad un ipotetico gradino di coppia, la macchina reagisce con un'accelerazione del rotore. Questa accelerazione porta ad un breve transitorio il cui il rotore ruota a velocità superiore a quella imposta dalla frequenza di rete. I fasori rappresentativi di \bar{E}_0 e \bar{V}_s non sono più isofrequenziali, pertanto \bar{E}_0 inizia a ruotare rispetto a \bar{V}_s finché permane il transitorio. A transitorio esaurito (quando la coppia elettromagnetica resistente della macchina eguaglia la coppia motrice di turbina), i due fasori tornano a ruotare alla stessa velocità, ma rimangono sfasati di un angolo δ chiamato "angolo di coppia":



L'angolo di coppia δ calcolabile ed è pari a

$$\delta = \int_{t_i}^{t_f} \left(\omega_r - \frac{\omega}{p} \right) dt$$

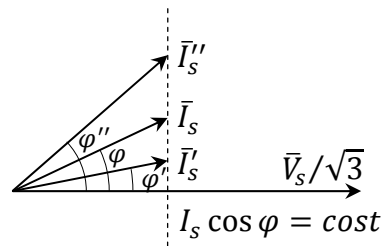
Dove t_i e t_f sono gli istanti di inizio e fine del transitorio. Dopo il transitorio, nelle nuove condizioni di regime, la macchina eroga una potenza attiva pari a

$$P = \sqrt{3} V_s I_s \cos \varphi = C_{em} \cdot \frac{\omega_r}{p} = P_{mecc}$$

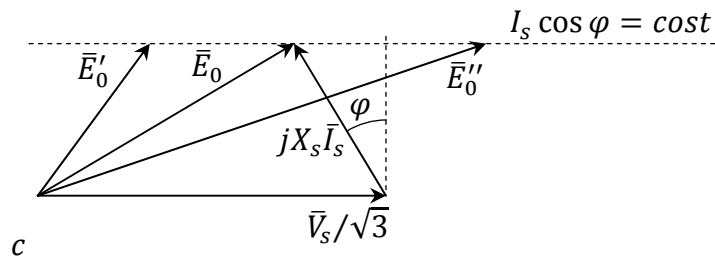
Da notare che se la potenza di turbina è costante, allora risulta

$$P_{mecc} = cost \rightarrow I_s \cos \varphi = cost$$

A questo punto supponiamo di mantenere costante la potenza meccanica della turbina e di variare l'eccitazione. Per quanto detto il prodotto $I_s \cos \varphi$ deve rimanere costante, pertanto la I_s è limitata a "muoversi" lungo una retta verticale:



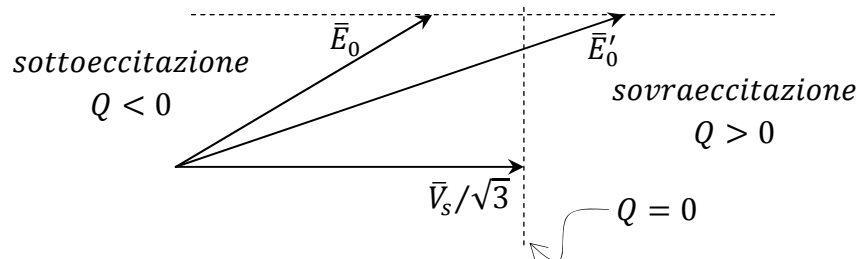
Analogamente, per quanto riguarda la caduta di tensione sulla reattanza sincrona, è facile vedere che quest'ultima può muoversi lungo una retta orizzontale:



In definitiva modificando la corrente di eccitazione (e quindi la E_0 e di conseguenza la I_s) si modifica la potenza reattiva che si eroga o si assorbe dalla rete:

$$Q = \sqrt{3}V_s I_s \sin \varphi$$

Graficamente si possono distinguere due zone di funzionamento a seconda della potenza reattiva:



5.5 CALCOLO DELLA COPPIA ELETTROMAGNETICA

Fin'ora si è parlato della coppia elettromagnetica resistente della macchina senza esplicitarla direttamente. A tal fine consideriamo inizialmente l'espressione della potenza attiva:

$$P = \sqrt{3}V_s I_s \cos \varphi$$

Dal grafico fasoriale è facile notare che

$$E_0 \sin \delta = X_s I_s \cos \varphi$$

Da cui

$$I_s \cos \varphi = \frac{E_0 \sin \delta}{X_s}$$

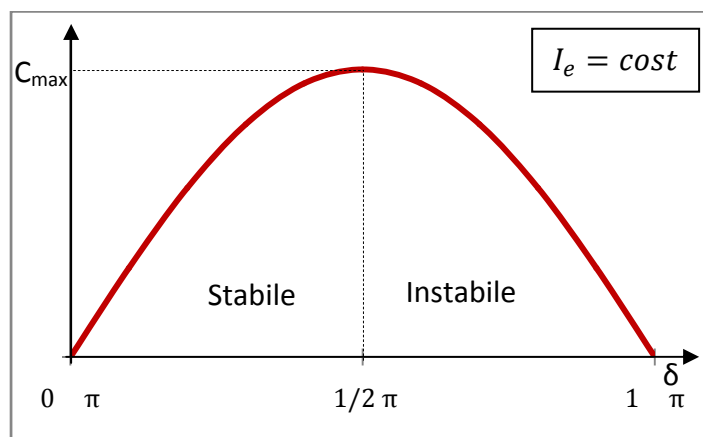
E quindi

$$P = \frac{\sqrt{3}V_s E_0}{X_s} \sin \delta = C_{em} \frac{\omega}{p}$$

Infine

$$C_{em} = \frac{\sqrt{3}V_s E_0 p}{X_s \omega} \sin \delta = C_{max} \sin \delta$$

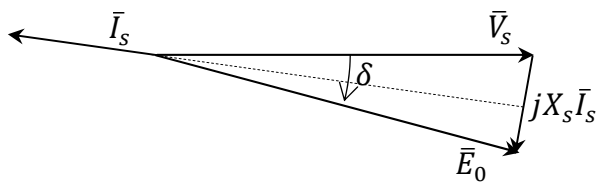
La coppia elettromagnetica della macchina, considerando una corrente di eccitazione costante, ha un andamento come il seguente:



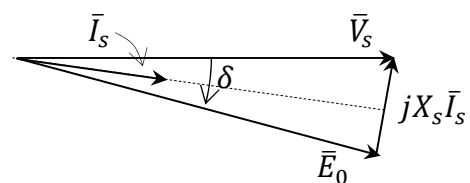
La zona a sinistra di $\frac{\pi}{2}$ è il tratto della curva a funzionamento stabile. In questa zona, ad un aumento della coppia motrice corrisponde un aumento della coppia elettromagnetica resistente, ed la macchina può raggiungere un nuovo punto di stabilità. Oltre $\frac{\pi}{2}$ la macchina non può lavorare. In questo tratto, infatti, ad un aumento di coppia motrice corrisponde una diminuzione di coppia resistente, la macchina accelera sempre di più fino a perdere il passo. Per questo, $\delta = \frac{\pi}{2}$ è chiamato limite di stabilità statica.

5.6 MOTORE SINCRONO

Nonostante la macchina sincrona sia prevalentemente impiegata come generatore, è possibile trovare in esercizio anche dei motori sincroni. La macchina, malgrado la complessità costruttiva rispetto ad una realizzazione asincrona, presenta dei vantaggi che, in alcune applicazioni, la rendono preferibile. Il funzionamento da motore è perfettamente analogo a quello del generatore. In questo caso, l'angolo di coppia sfasa in ritardo la E_0 rispetto alla V_s . Si può tracciare il diagramma fasoriale utilizzando la convenzione dei generatori (in figura a sinistra). Tuttavia, in questo caso, è più opportuno utilizzare la convenzione degli utilizzatori, per cui la corrente risulta opposta:

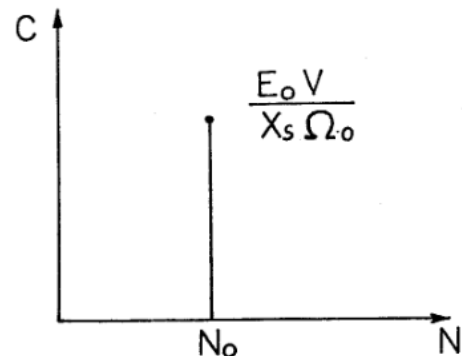
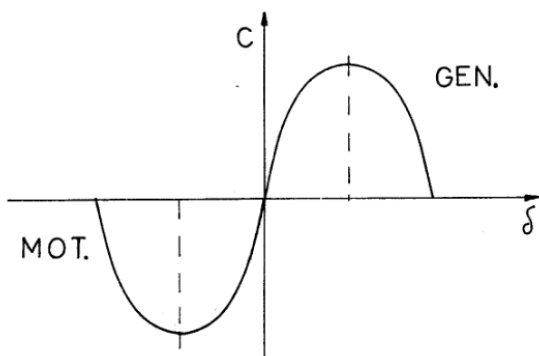


Convenzione dei generatori



Convenzione degli utilizzatori

L'avviamento della macchina deve essere effettuato mediante un inverter, in quanto la macchina non possiede coppia di spunto. Esistono anche applicazioni che prevedono l'utilizzo di gabbie poste nel rotore, che entrano in gioco allo spunto e durante i transitori. Se si applica un gradino di coppia resistente (inferiore alla coppia elettromagnetica massima) la macchina risponde con un transitorio per poi ristabilire la velocità di sincronismo. Per quanto riguarda i tratti di stabilità e di instabilità valgono le stesse considerazioni già effettuate nel precedente capitolo. I grafici di coppia-angolo di coppia e coppia-velocità angolare sono i seguenti:



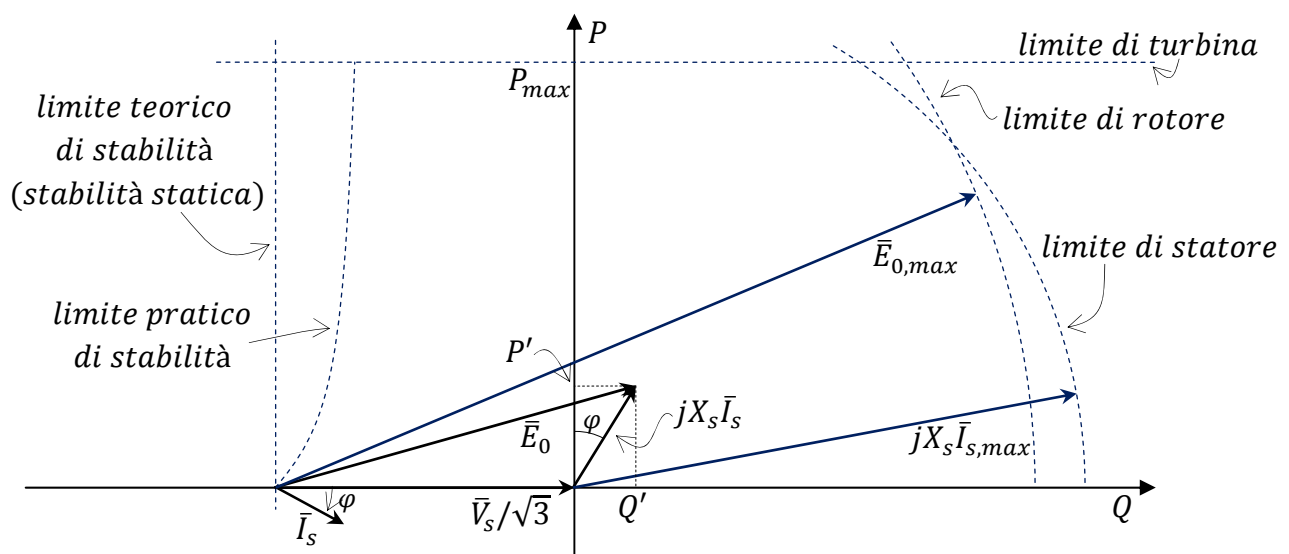
Come si può vedere il motore sincrono vanta una caratteristica di coppia estremamente efficace, riuscendo a mantenere la velocità di sincronismo per qualsiasi coppia inferiore alla coppia massima. Inoltre, aumentando la E_0 è possibile aumentare il limite di sovraccaricabilità del motore, a scapito della potenza reattiva richiesta. Accoppiando questa macchina ad un azionamento che sia in grado di variare la frequenza di alimentazione, è possibile coprire tutte le velocità angolari comprese tra 0 e ω/p mantenendo costante la coppia.

5.7 LIMITI DI FUNZIONAMENTO DELLA MACCHINA SINCRONA

È evidente che la macchina presenta dei limiti di esercizio dettati sia al motore primo a cui è accoppiata, sia dalle caratteristiche costruttive della stessa. Vediamo quali sono questi limiti:

- Il primo limite è evidentemente legato alla massima potenza meccanica che il motore primo è in grado di fornire. A questo limite corrisponde un limite di massima potenza attiva erogabile: P_{max} ;
- Il secondo limite è imposto dal limite termico di statore e quindi alle correnti che possono scorrere in modo continuativo in esso: $I_{s,max}$. Questo limite è normalmente molto elevato, in quanto i conduttori di statore sono raffreddati efficacemente.
- Il terzo limite è dettato dal limite termico di rotore e quindi alla massima tensione di eccitazione ammissibile: $E_{0,max}$. Normalmente si dimensiona il sistema di eccitazione in modo tale da avere $E_{0,max} = 1,2 E_{0n}$;
- Il quarto limite dipende dal limite pratico di stabilità, come visto nel precedente capitolo sulla coppia: δ_{max} . C'è da notare che, nella pratica, questo limite è inferiore al limite teorico ($\delta_{max} \leq 90^\circ$) in quanto è necessario assicurare un certo margine di sicurezza nei transitori.

Questi limiti si possono riportare in un diagramma P-Q:



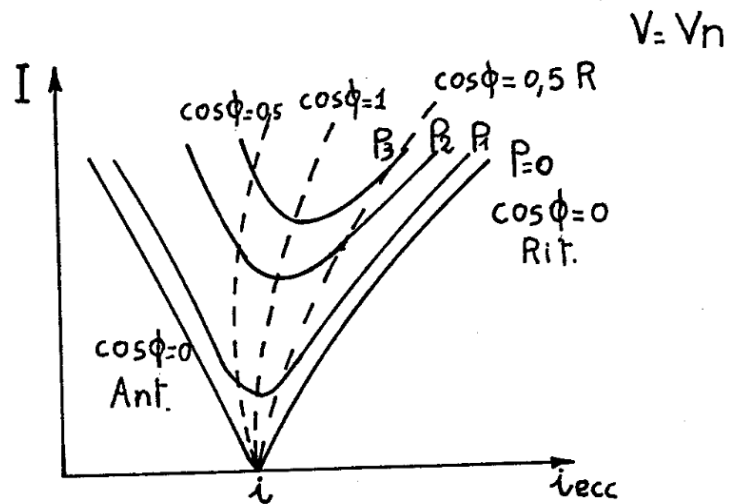
Infine c'è da notare che esiste una relazione tra le potenze attive e reattive P' e Q' e la tensione:

$$P = \underbrace{X_s I_s \cos \varphi}_{\substack{\text{proiezione} \\ \text{sull'asse } P}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3} V_s}{X_s} \right)}_{\substack{\text{fattore} \\ \text{di scala}}}$$

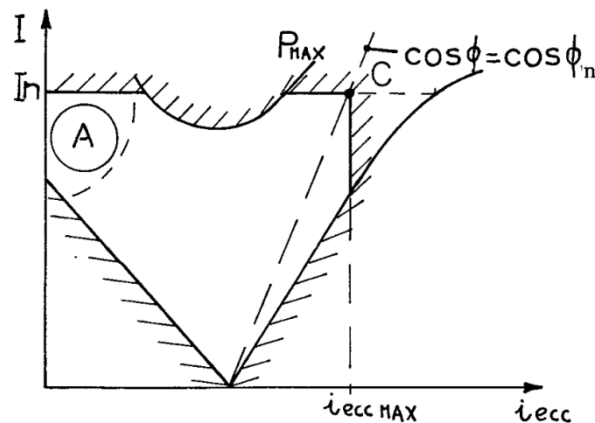
$$Q = X_s I_s \sin \varphi \left(\frac{\sqrt{3} V_s}{X_s} \right)$$

5.8 CURVE A "V"

Un altro diagramma utilizzato per lo studio delle macchine sincrone, è il piano $I - i_{ecc}$. Su questo piano è possibile tracciare delle curve di funzionamento a tensione costante, che hanno una forma "a V". È possibile individuare tutti i punti di funzionamento nelle varie condizioni di carico.



È altresì possibile individuare le posizioni di funzionamento limite della macchina:

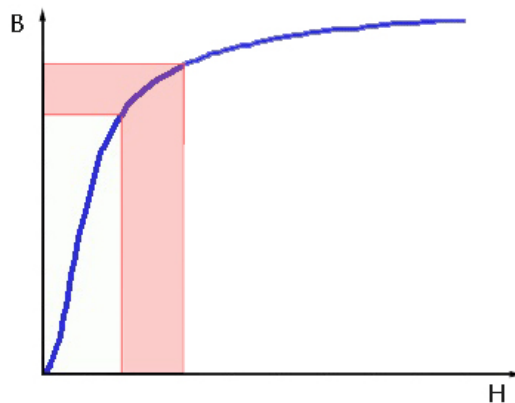


Che sono individuate da:

- Limite inferiore: la curva a V per $P = 0$.
- Limite destro: la retta di massima corrente di eccitazione.
- Limite superiore: la retta di massima corrente di indotto e la curva a V per potenza attiva massima.

5.9 CAMPI MAGNETICI AL TRAFERRO

Vogliamo tracciare un andamento del campo magnetico al traferro nelle ipotesi di velocità angolare del rotore costante e di assenza di saturazione del ferro. Questa seconda ipotesi è particolarmente forte, in quanto, nella realtà, il ferro presenta una caratteristica non lineare e, tipicamente, il punto di lavoro è posizionato proprio in corrispondenza al “ginocchio”, per sfruttare al meglio il materiale (la caratteristica $B - H$ è leggibile anche come caratteristica $E_0 - I_e$):



Sotto le ipotesi di linearità, tuttavia, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e calcolare il campo magnetico totale al traferro come somma dei campi di rotore e di statore.

Consideriamo gli avvolgimenti di statore e di rotore (di eccitazione) distribuiti uniformemente. In tali condizioni esiste soltanto la prima armonica di B :

$$\underbrace{B_e(\theta, t)}_{\text{campo di eccitazione}} = B_{e,max} \sin(\omega t - \theta)$$

B_e da origine ad un flusso concatenato con lo statore:

$$\Psi_{s,e} = \Psi_{(s,e)max} \sin(\omega t) = \sqrt{2} \lambda_{s,e} I_e \sin(\omega t)$$

Il quale flusso concatenato induce una forza elettromotrice e_0 sugli avvolgimenti di statore:

$$e_0 = \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t)$$

Una volta chiusa la macchina su un carico, nello statore circolerà una corrente pari a:

$$i_s = \sqrt{2} I_s \cos(\omega t - \psi) = \sqrt{2} I_s \sin(\omega t - \psi + \pi/2)$$

Questa corrente genera a sua volta un campo magnetico di statore B_s detto campo di reazione di indotto, pari a

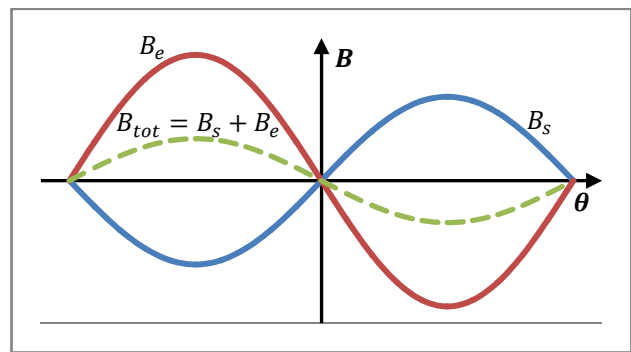
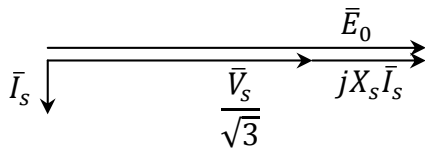
$$B_s(\theta, t) = B_{s,max} \sin\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Il termine $\frac{\pi}{2}$ è stato introdotto solamente per motivi formali, per passare da coseno a seno e poter effettuare facilmente un confronto con il campo di eccitazione. In definitiva al traferro abbiamo:

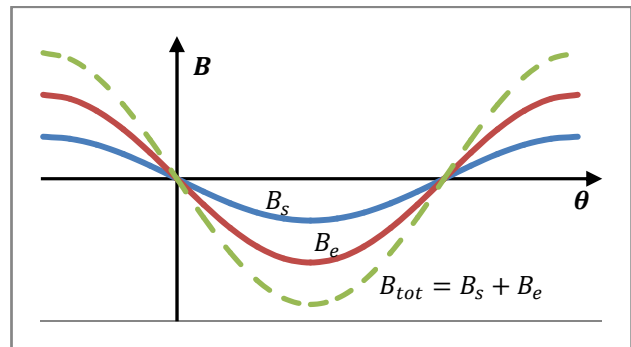
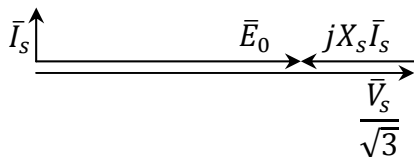
$$\begin{cases} B_e(\theta, t) = B_{e_{max}} \sin(\omega t - \theta) \\ B_s(\theta, t) = B_{s_{max}} \sin\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2} - \psi\right) \end{cases}$$

L'angolo $\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ è lo sfasamento tra i campi di eccitazione e di reazione di indotto. È interessante analizzare alcuni casi particolari.

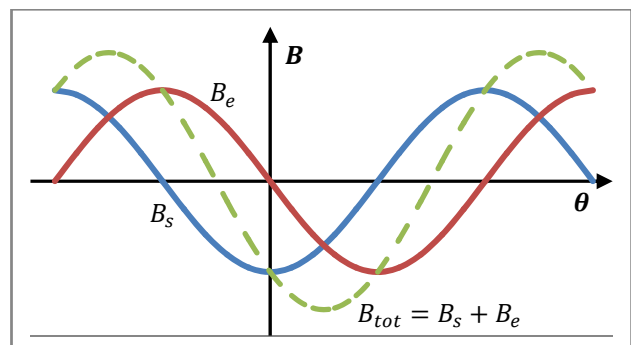
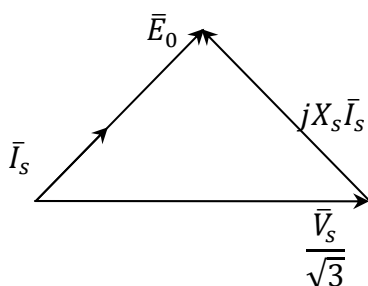
Primo caso: $\psi = \pi/2, \delta = 0$. Il carico è puramente induttivo, la macchina è sovraeccitata e funziona da condensatore rotante.



Secondo caso: $\psi = -\pi/2, \delta = 0$. Il carico è puramente capacitivo, la macchina è sottoeccitata e funziona da compensatore sincrono.

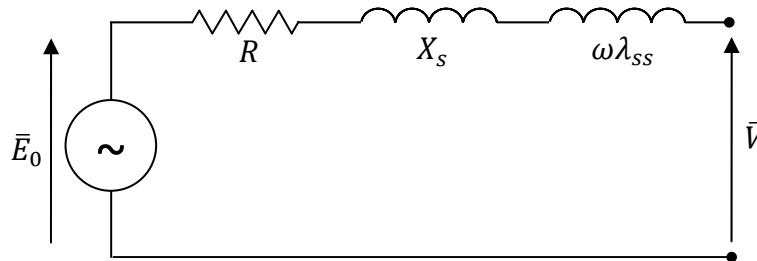


Terzo caso: $\psi = 0$. Condizione di massima potenza attiva trasferita $P = \sqrt{3}E_0 I_s \cos \psi$.



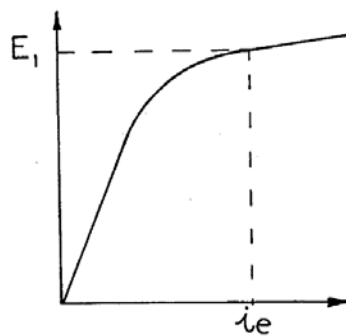
5.10 TEORIA DI POTIER

Fin'ora abbiamo trattato la macchina sincrona nelle condizioni ideali in cui non è presente il fenomeno di saturazione nel ferro. Nel funzionamento reale, però, la saturazione è presente ed il suo principale effetto è quello di non poter considerare costante il termine $\omega\lambda_{SS}$, e quindi di non poterlo sommare alla reattanza di dispersione in modo da avere un'unica reattanza:

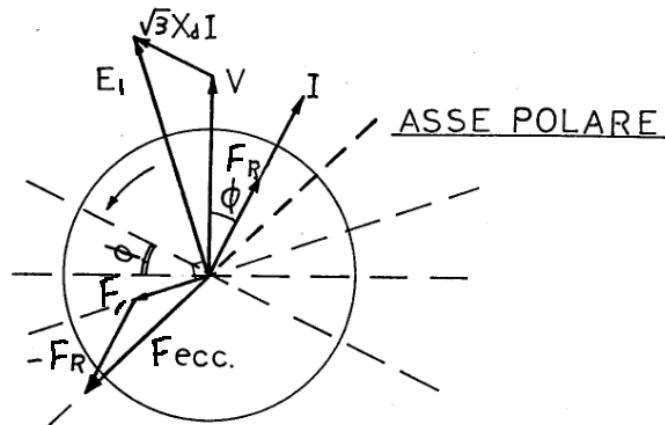


Il problema è quello di calcolare, note le condizioni di carico (corrente, tensione e $\cos\varphi$) della macchina, la corrente di eccitazione tale da mantenere le condizioni volute. Per questo si ricorre alla teoria di Potier. Si costruisce un diagramma seguendo i seguenti passaggi:

1. Si traccia il fasore \bar{V} , in modo arbitrario.
2. Si disegna il fasore \bar{I} , sfasato di un angolo φ rispetto a \bar{V} .
3. Si traccia il fasore $jX_d\bar{I}$, in quadratura in anticipo rispetto ad \bar{I} .
4. Si traccia il fasore \bar{E}_1 mediante la relazione: $\bar{E}_1 = \bar{V} + jX_d\bar{I}$
5. Si calcola la $I_{e,tot}$ mediante il diagramma $E - i_{ecc}$:



6. Mediante la formula $\bar{\mathcal{F}}_{tot} = nI_{e,tot}$, (con n numero di spire di induttore. F_r in figura) si calcola il modulo del fasore $\bar{\mathcal{F}}_{tot}$, e si traccia in quadratura in anticipo rispetto ad \bar{E}_1 .
7. Mediante la formula $\bar{\mathcal{F}}_{reaz} = K N \bar{I}$ (con N numero di spire di indotto e I corrente di indotto. F_R in figura) si calcola il modulo di della $\bar{\mathcal{F}}_{reaz}$, e si traccia in fase con la \bar{I} .
8. Si calcola la $\bar{\mathcal{F}}_{ecc}$ come $\bar{\mathcal{F}}_{ecc} = \bar{\mathcal{F}}_{tot} - \bar{\mathcal{F}}_{reaz}$
9. Si calcola la corrente I_{ecc} necessaria mediante la formula $I_{ecc} = \frac{\bar{\mathcal{F}}_{ecc}}{n}$



Nota: è stata trascurata la resistenza di statore, l'equazione completa è: $\bar{E}_1 = \bar{V} + (R + jX_d) \bar{I}$.

Nella pratica si introduce un coefficiente α chiamato coefficiente di Potier, definito come:

$$\alpha = \sqrt{2} \frac{3}{2} \frac{n_s q_s K_{ds} K_{ps}}{n_e q_e K_{pe}}$$

Questo coefficiente consente di riportare all'induttore la corrente di statore per ottenere una corrente fittizia $I_{ecc, reaz}$ che percorrendo il rotore provoca la stessa \bar{F}_{reaz} :

$$n I_{ecc, reaz} = K N \bar{I}$$

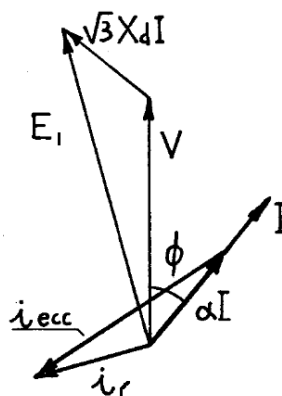
Da cui:

$$I_{ecc, reaz} = K \frac{N}{n} \bar{I} = \alpha I$$

In questo modo è possibile calcolare la corrente di induttore necessaria per avere le condizioni di carico richieste semplicemente come:

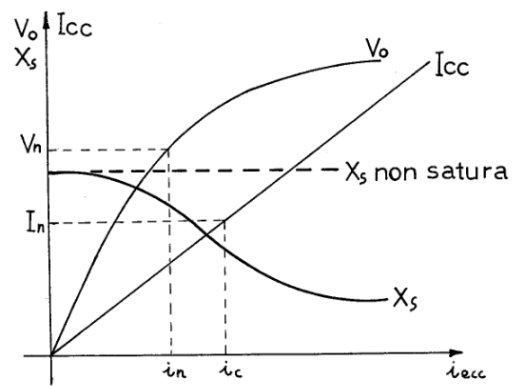
$$I_{ecc} = I_{e, tot} - \alpha I$$

Graficamente:



5.11 REATTANZA SINCRONA

Qwerty



Qwerty

5.12 DISPERSIONE ROTORICA

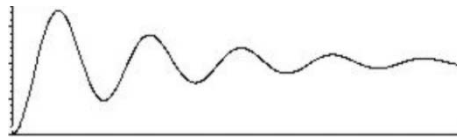
http://www.electroportal.net/vis_resource.php?section=DomRisp&id=187

5.13 CENNI DI STABILITÀ IN TRANSITORIO

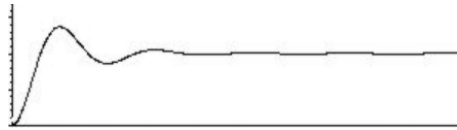
Supponiamo di trovarci in una condizione di funzionamento stabile con coppia motrice C_1 , equilibrata dalla coppia elettromotrice. Applicando un gradino di coppia motrice ΔC portando la coppia a C_2 , la macchina accelera e si può scrivere la seguente equazione differenziale:

$$C_2 = C_1 + \Delta C = C_{mot} \sin \delta_1 + I \frac{\partial \delta}{\partial t} + k \frac{\dot{\delta}}{\omega_r}$$

A causa dell'inerzia del motore, esistono delle oscillazioni attorno al nuovo punto di stabilità C_2 :



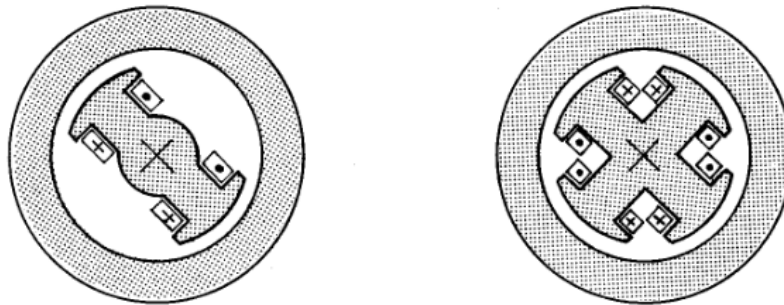
Queste oscillazioni si chiamano “oscillazioni pendolari”. È a causa di queste oscillazioni che è necessario ridurre il limite pratico di stabilità. È possibile ridurre l'entità del fenomeno introducendo delle sbarre nel rotore della macchina come avviene per la macchina asincrona, ottenendo una risposta in cui le oscillazioni vengono smorzate in un tempo minore tipo la seguente:



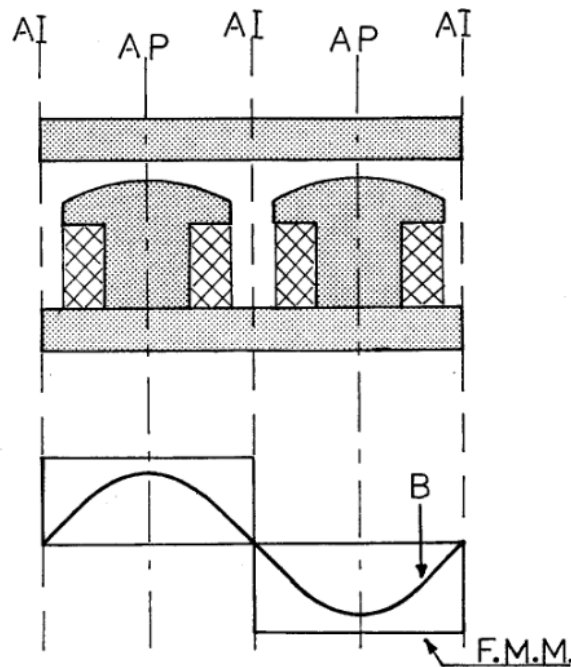
Lo studio di questi fenomeni, della loro influenza sulla stabilità della rete e delle misure adottate per ridurre gli effetti, è parte del corso di Impianti Elettrici.

5.14 MACCHINA SINCRONA A POLI SALIENTI – TEORIA DI BLONDEL

Consideriamo una macchina sincrona a poli salienti:



Le espansioni polari sono sagomate in modo tale da avere un campo al traferro sinusoidale:



Possiamo pertanto esprimere il campo di eccitazione come

$$B_e(\theta, t) = B_{e,max} \sin(\omega t - \theta)$$

A questo campo B_e corrisponde un flusso concatenato con il rotore Ψ_{se} pari a

$$\Psi_{se} = \Psi_{se,max} \sin(\omega t) = \sqrt{2} \lambda_{se} I_e \sin(\omega t)$$

Ψ_{se} da origine ad una fem indotta e_0 che, come visto in § 5.8, origina una corrente di statore i_s :

$$e_0 = \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t)$$

$$i_s = \sqrt{2} I_s \cos(\omega t - \psi) = \sqrt{2} I_s \sin\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

dove ψ è proprio lo sfasamento tra i_s ed e_0 . Fin qui non ci sono differenze tra una macchina a rotore liscio ed una a poli salienti. A questo punto, però, per trovare il campo al traferro provocato da i_s (campo di reazione) si applica la **teoria di Blondel** o della **doppia reazione**: la f.m.m. di statore si decompone lungo l'asse polare (questa parte della f.m.m. prende il nome di f.m.m. diretta) e l'asse interpolare (questa parte della f.m.m. prende il nome di f.m.m. in quadratura).

Scomponiamo la i_s con la formula di sottrazione $\{\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\alpha)\}$:

$$i_s = \sqrt{2} I_s \sin\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} I_s \left[\cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t) + \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t) \right]$$

Ponendo

$$\begin{cases} I_d = I_s \sin \psi \\ I_q = I_s \cos \psi \end{cases}$$

Si ottiene:

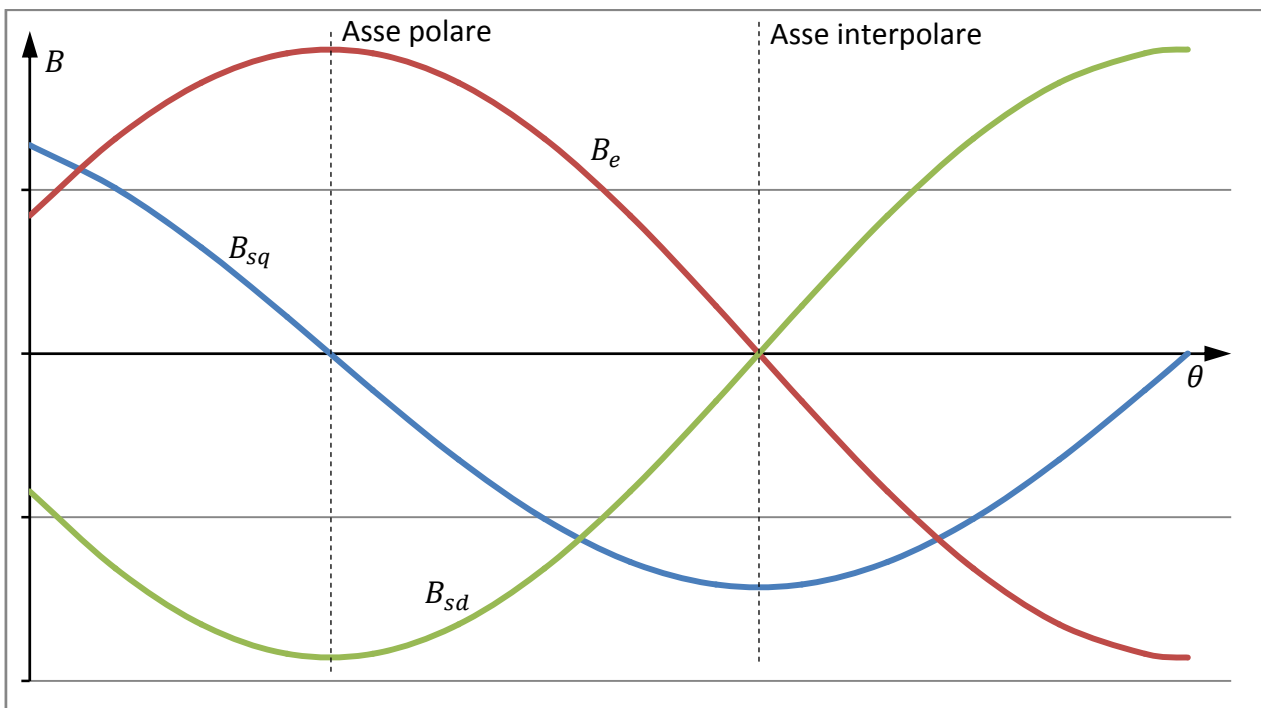
$$i_s(t) = \sqrt{2} \left[\underbrace{I_d \sin(\omega t)}_{\text{diretta}} + \underbrace{I_q \cos(\omega t)}_{\text{quadratura}} \right] = i_d(t) + i_q(t)$$

A questo punto calcoliamo i campi di induzione magnetica, dovuti alla somma di queste due correnti:

$$i_d \rightarrow B_{sd}(\theta, t) = B_{sd,max} \sin(\omega t - \theta)$$

$$i_q \rightarrow B_{sq}(\theta, t) = B_{sq,max} \cos(\omega t - \theta)$$

Questi due campi hanno un andamento come quello riportato in figura:



Il campo B_{tot} si ottiene semplicemente dalla somma dei due campi:

$$B_{s,tot} = B_{sd} + B_{sq}$$

La tensione ai morsetti della macchina, quindi, sarà pari a:

$$\bar{V}_s = \bar{E}_0 - (R_s + jX_{ds})\bar{I}_s - j\omega\bar{\Psi}_{sd} - j\omega\bar{\Psi}_{sq}$$

Dove

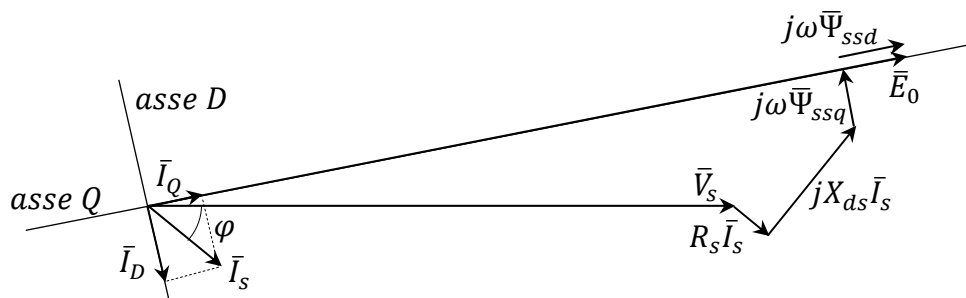
$$\bar{\Psi}_{sd} = \lambda_{ss,d}\bar{I}_d$$

$$\bar{\Psi}_{sq} = \lambda_{ss,q}\bar{I}_q$$

Per i coefficienti di induzione vale sempre la relazione

$$\lambda_{ss,d} > \lambda_{ss,q}$$

È possibile tracciare il diagramma fasoriale della macchina. Supponiamo di conoscere la direzione di \bar{E}_0 . Sotto questa ipotesi possiamo facilmente trovare la direzione degli assi diretti ed in quadratura. Infatti la direzione dell'asse in quadratura coincide con la direzione di \bar{E}_0 , mentre l'asse diretto è perpendicolare ad esso. Dopo aver tracciato $R_s\bar{I}_s$ e $jX_{ds}\bar{I}_s$, si individuano \bar{I}_q e \bar{I}_d e si possono tracciare $j\omega\bar{\Psi}_{ss,q}$ e $j\omega\bar{\Psi}_{ss,d}$:



Per via della presenza di \bar{I}_d e \bar{I}_q non è possibile trovare un circuito equivalente. Se non conosco la direzione di \bar{E}_0 è ugualmente possibile tracciare il diagramma fasoriale. Definendo

$$\begin{cases} X_d = X_{ds} + \omega\lambda_{ss,d} \\ X_q = X_{ds} + \omega\lambda_{ss,q} \end{cases}$$

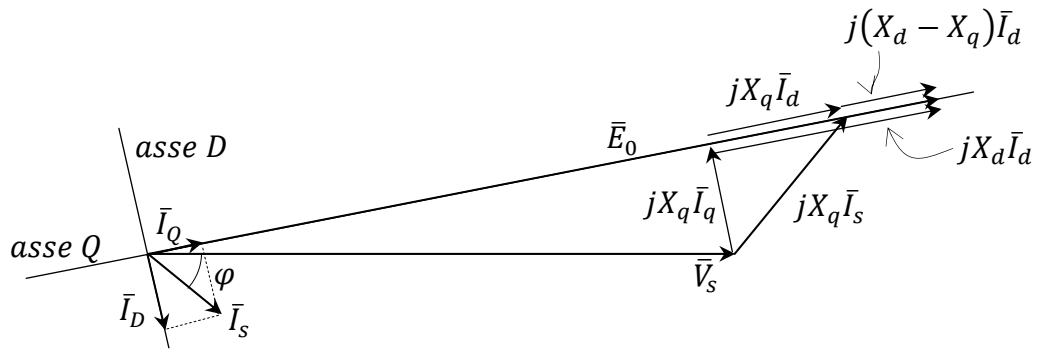
È possibile riscrivere l'equazione della tensione ai morsetti come:

$$\bar{V}_s = \bar{E}_0 - R_s\bar{I}_s - jX_d\bar{I}_d - jX_q\bar{I}_q$$

Quindi, anche senza conoscere \bar{E}_0 , è possibile tracciare il diagramma conoscendo \bar{I}_s , X_d , X_q ed approssimando $R_s \approx 0$. Tracciando il vettore $jX_q\bar{I}_s$, infatti, si individua la direzione dell'asse in quadratura e di conseguenza si può tracciare tutto il grafico. Ciò è facilmente dimostrabile in quanto:

$$jX_q\bar{I}_s = jX_q(\bar{I}_q + \bar{I}_d)$$

ed è intuitivamente apprezzabile in figura:



In più, se al punto così trovato si aggiunge un vettore pari a $j(X_d - X_q) \vec{I}_a$ si individua anche il modulo di \vec{E}_0 .

5.15 CAMPO DI FUNZIONAMENTO DELLA MACCHINA SINCRONA A POLI SALIENTI

5.16 CALCOLO DELLA COPPIA NELLE MACCHINE SINCRONE A POLI SALIENTI

La potenza attiva elaborata dalla macchina è pari a:

$$P = 3 \frac{V_s}{\sqrt{3}} I_s \cos \varphi \stackrel{\cdot \frac{X_d}{X_d}}{\cong} 3 \frac{V_s}{\sqrt{3} X_d} (X_d I_s \cos \varphi)$$

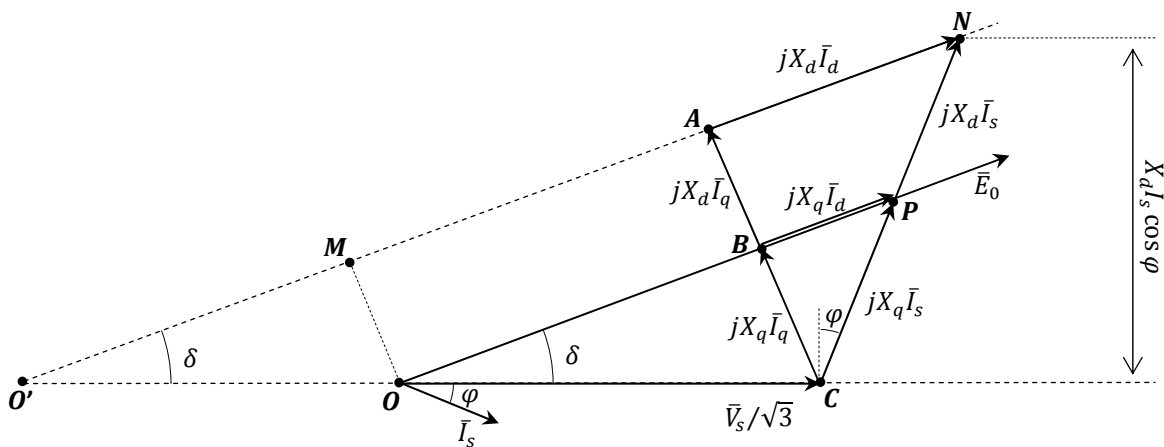
Questa potenza, a meno di un certo rendimento, sarà pari alla potenza meccanica, pertanto:

$$P_{mecc} = \frac{\omega}{p} C = P$$

Da cui la coppia:

$$C = \frac{3p}{\omega} \frac{V_s}{\sqrt{3} X_d} (X_d I_s \cos \varphi)$$

Vogliamo ottenere una equazione della coppia indipendente dalla corrente di statore, e dipendente dall'angolo di coppia δ come avveniva per le macchine a rotore liscio. Per far ciò è necessario operare alcune considerazioni di carattere geometrico che faranno riferimento alla seguente figura:



Si può innanzi tutto osservare che

$$X_d I_s \cos \varphi = \overline{CN} \cos \varphi = \overline{O'N} \sin \delta = (\overline{O'M} + \overline{MN}) \sin \delta$$

Il tratto \overline{MN} è proprio pari ad E_0 . Il tratto $\overline{O'M}$ necessita di un ulteriore sviluppo. È evidente che

$$\overline{O'M} = \overline{O'O'} \cos \delta$$

Bisogna calcolare quanto vale $\overline{O'O'}$. Considerando i due triangoli simili $O'MO$ e $O'BC$, possiamo scrivere:

$$\frac{\overline{O'O'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{(X_d - X_q) I_q}{X_q I_q} \rightarrow \overline{O'O'} = \frac{V_s}{\sqrt{3}} \frac{X_d - X_q}{X_q}$$

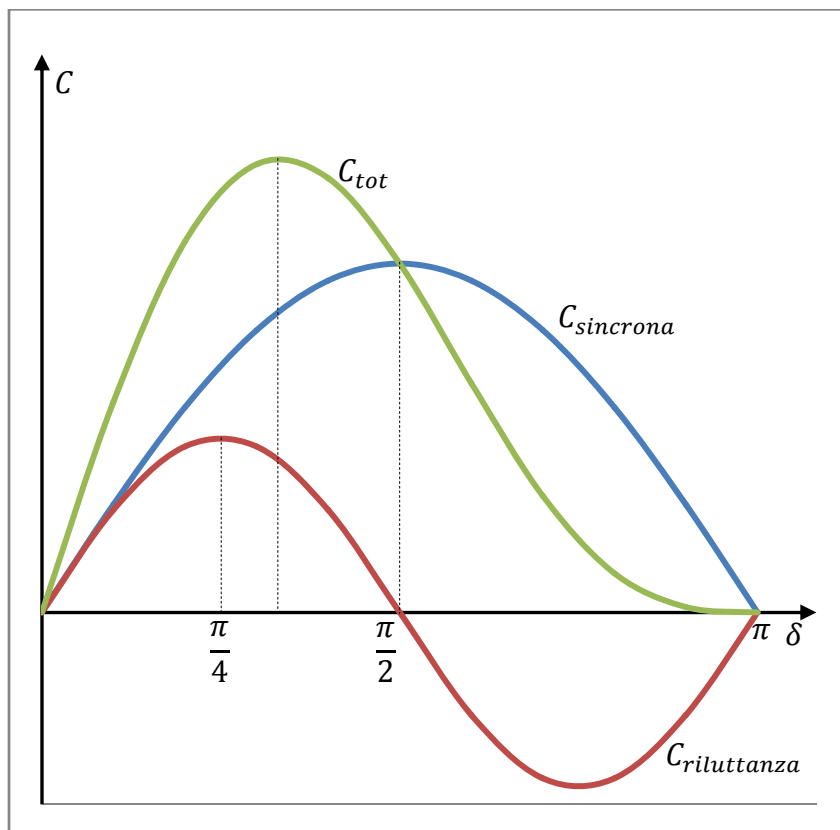
Tornando alla prima espressione si può dunque scrivere:

$$X_d I_s \cos \varphi = \left[\frac{V_s}{\sqrt{3}} \frac{X_d - X_q}{X_q} \cos \delta + E_0 \right] \sin \delta = E_0 \sin \delta + \frac{1}{2} \frac{V_s}{\sqrt{3}} \frac{X_d - X_q}{X_q} \sin 2\delta$$

In conclusione l'espressione della coppia per macchine a poli salienti è pari a:

$$C_{em} = \frac{3p}{\omega} \left[\underbrace{\frac{E_0 V_s}{\sqrt{3} X_d}}_{C_{sincrona}} \sin \delta + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{V_s^2}{3} \frac{X_d - X_q}{X_q X_d}}_{C_{riluttanza}} \sin 2\delta \right]$$

È evidente che la coppia, in questa tipologia di macchine, è dovuta al contributo di due componenti. Il primo è uguale alla coppia già vista per le macchine a rotore liscio (“coppia sincrona”). Il secondo è detto “coppia di riluttanza”. Questa coppia esiste anche senza che sia presente una tensione di eccitazione. La presenza di questa coppia ha come implicazione l'abbassamento del punto di stabilità statica δ_{max} , che risulta ora compreso tra $\frac{\pi}{4} \leq \delta_{max} \leq \frac{\pi}{2}$, e l'innalzamento della coppia massima, come si può vedere in figura:



CAPITOLO 6

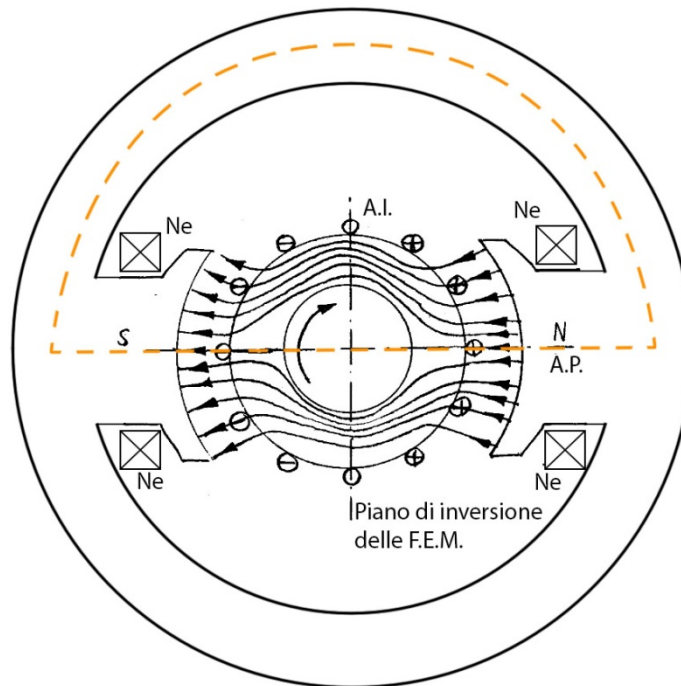
MACCHINA IN CORRENTE CONTINUA

6.1 GENERALITÀ SULLA MACCHINA IN CORRENTE CONTINUA

Qwerty

6.2 DEDUZIONE DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

Consideriamo una macchina in corrente continua come quella riportata in figura:



applicando la legge di ampere su una linea chiusa (linea arancione in figura) si ottiene che:

$$\oint H dl = 2N_e I_e$$

Da cui, considerando la permeabilità magnetica del ferro, molto superiore a quella dell'aria, si può scrivere:

$$2\delta H = 2N_e I_e$$

Quindi il campo di induzione B è pari a

$$B = \mu_0 \frac{N_e I_e}{\delta}$$

La fem indotta sul rotore (chiamato in questo tipo di macchine "armatura") è calcolabile come:

$$e = Blv$$

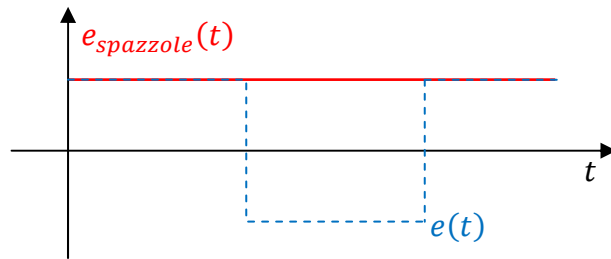
Dove l è la lunghezza del lato attivo e v è la velocità tangenziale di quest'ultimo:

$$v = \omega_r \cdot r = \omega_r \frac{\tau}{\pi}$$

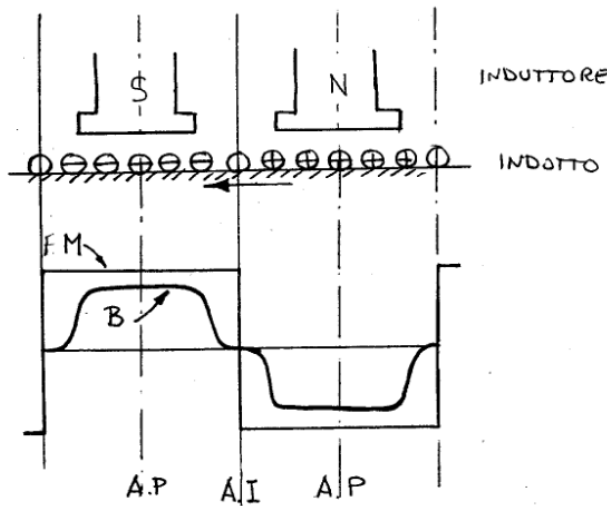
Con τ passo polare. La fem indotta è pari a:

$$e = \mu_0 \frac{I_e N_e l \tau}{\delta \pi} \omega_r$$

Questa fem è raccolta attraverso un collettore a lamelle, che consente di “raddrizzare” la fem, ottenendo una tensione continua ai morsetti di armatura:



Nella realtà costruttiva, però, per aumentare la $e(t)$ si inseriscono più cave con due conduttori per cava. In questo modo la fem prodotta in ogni cava si somma con quella delle altre. Il risultato di questa operazione si risente anche sulla forma d'onda di B (e quindi delle fem):



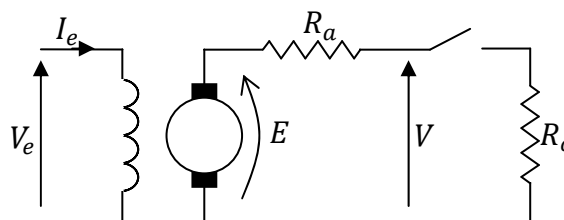
la fem totale è pari a:

$$E = \sum_1^{N/2} e = \frac{N}{2} e_{media} = \frac{N}{2\pi} \omega_r \frac{(l \tau B_{medio})}{\Phi_e} = \frac{N}{2\pi} \Phi_e \omega_r$$

Quindi, in definitiva:

$$E = \frac{N}{2\pi} \Phi_e \omega_r$$

Lo schema equivalente del circuito è il seguente:



6.3 CALCOLO DELLA COPPIA ELETTROMAGNETICA

Per calcolare la coppia si può ricorrere alla sommatoria delle forze che agiscono sui singoli conduttori di rotore:

$$F = Bi \times l$$

Da cui

$$C = \sum_{i=1}^N F_i \cdot r = N \frac{\tau}{\pi} l B_{media} \frac{l}{2} = \frac{N}{2\pi} \Phi_e I$$

Quindi, in definitiva:

$$C = \frac{N}{2\pi} \Phi_e I$$

Si poteva giungere allo stesso risultato anche osservando che la potenza meccanica è pari alla potenza in ingresso meno le perdite:

$$P_{mecc} = C \cdot \omega_r = VI - R_a I^2$$

E dato che, per l'equazione della macchina risulta:

$$V = E + R_a I \rightarrow VI = EI + R_a I^2$$

Si ottiene

$$EI = C \cdot \omega_r$$

Da cui

$$C = \frac{EI}{\omega_r}$$

Sostituendo a questa l'equazione già nota di $E = K \Phi_e \omega_r$, si ha:

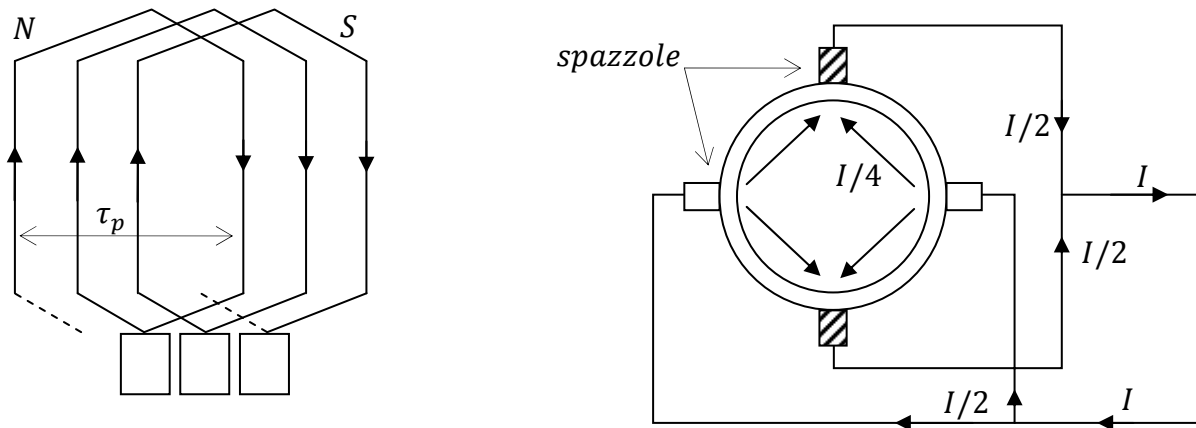
$$C = K \Phi_e I$$

6.4 AVVOLGIMENTI EMBRICATI E ONDULATI

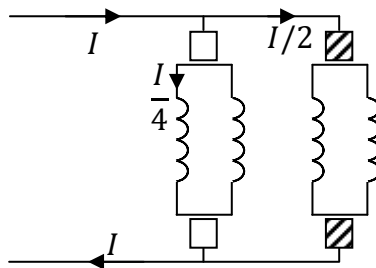
Le macchine in corrente continua possono essere costruite con due diverse tipologie di avvolgimenti:

- Avvolgimento embricato o parallelo
- Avvolgimento ondulato o serie

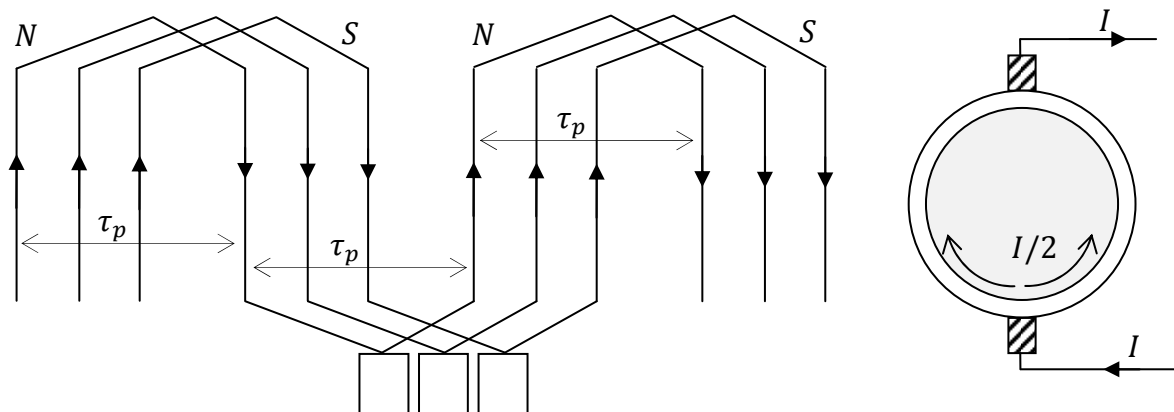
L'avvolgimento embricato è schematizzabile come:



Il numero di vie interne che la corrente trova è pari al numero di poli. Ad esempio, in figura 4 poli → 4 vie. Il circuito equivalente di tale avvolgimento è il seguente:



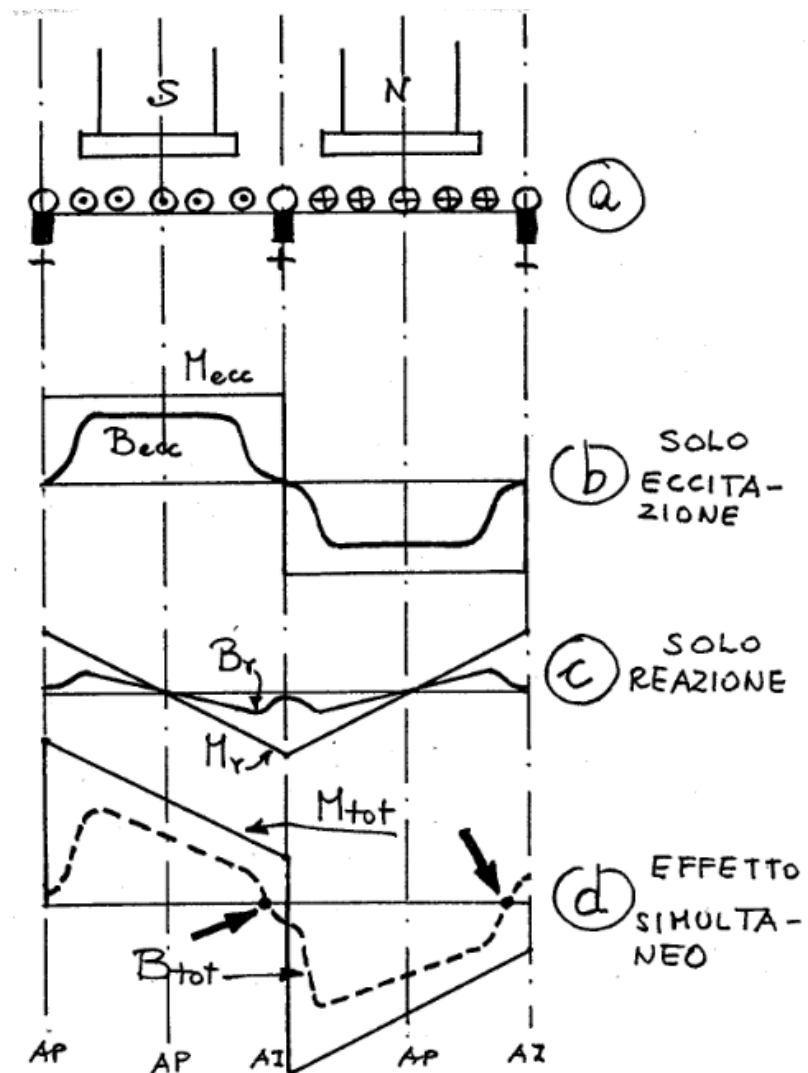
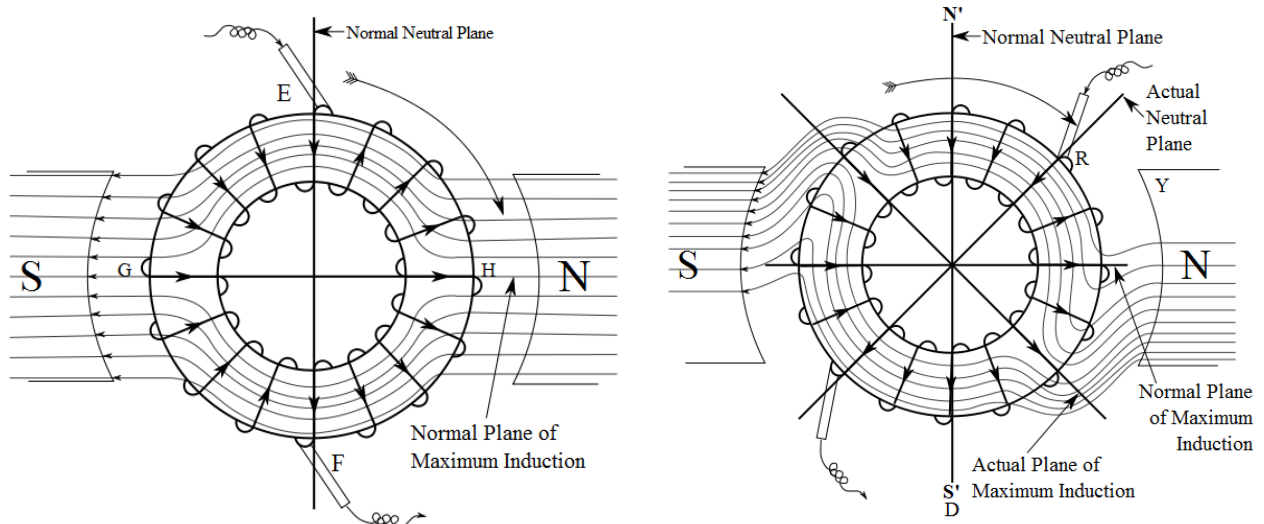
L'avvolgimento serie, invece, è schematizzabile come:



Questo tipo di avvolgimento è utile quando la macchina deve essere sottoposta ad alte tensioni e basse correnti.

6.5 REAZIONE DI ARMATURA

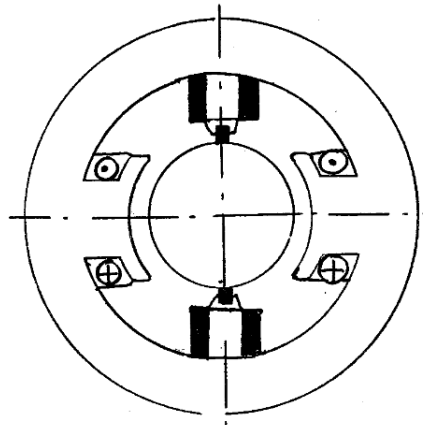
Nel funzionamento da dinamo, si genera una fem d'armatura che da luogo ad una corrente il cui campo costituisce una coppia elettromagnetica frenante. Per vedere come varia il campo magnetico applichiamo la sovrapposizione degli effetti:



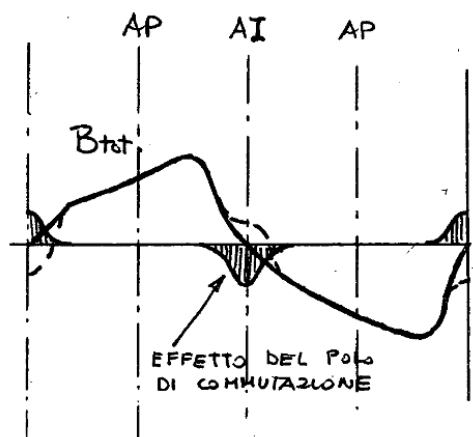
Come evidente dalla figura, la reazione di armatura porta alla saturazione locale delle zone dei corni polari. Ciò provoca:

- Un aumento locale delle perdite nel ferro
- Un effetto smagnetizzante
- La rotazione (di un generico angolo α) del piano di inversione delle fem. Ciò è negativo, in quanto le spazzole sono poste in corrispondenza di un angolo di $\pi/2$ e questo porta una commutazione tra lamelle aventi una fem diversa da zero. Durante la commutazione, quindi, esistono scintille, con relative perdite ed usura dei materiali.

Per ovviare al problema c, le macchine sono equipaggiate con dei **poli di commutazione**:



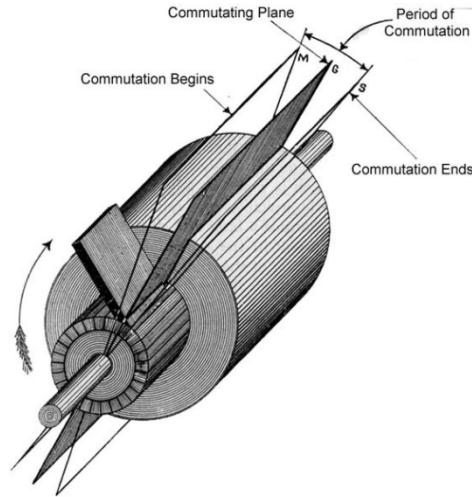
Questi poli hanno gli avvolgimenti posti in serie con l'avvolgimento di armatura. L'effetto che si ottiene è il seguente:



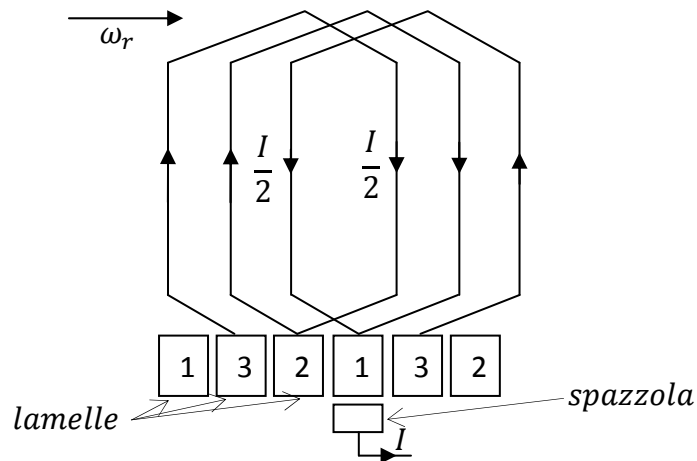
Per potenze maggiori di 100 kW, si possono anche utilizzare degli **avvolgimenti di compensazione**, sempre posti in serie con l'armatura, che tendono a riportare il campo magnetico in una configurazione simile al funzionamento a vuoto. In ogni modo, il concetto è quello di evitare forti gradienti di B , che porterebbero a grandi differenze di tensione tra lamelle vicine e, quindi, alla scarica.

6.6 FENOMENO DELLA COMMUTAZIONE

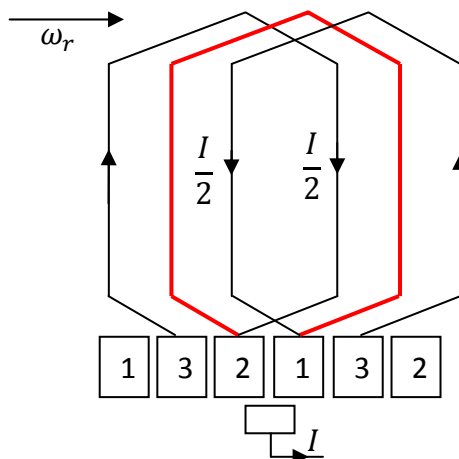
Per comprendere il fenomeno della commutazione, è necessario capire il meccanismo con cui essa avviene. Consideriamo una macchina nel suo funzionamento normale.



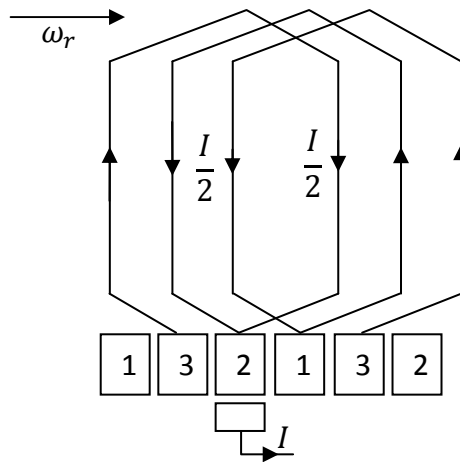
Inizialmente si ha la spazzola completamente sulla lamella 1:



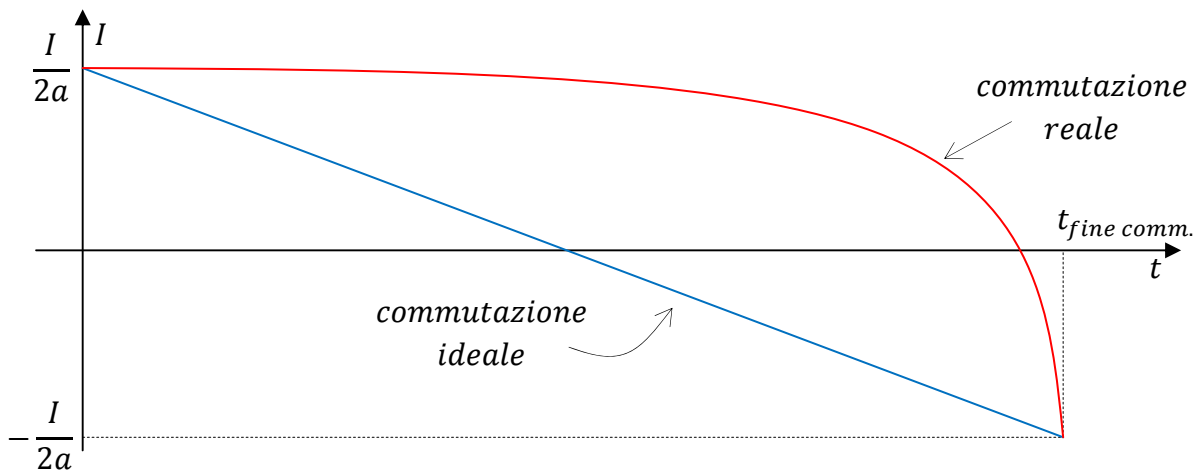
Successivamente il collettore si sposta, e la spazzola si porta a cavallo di di due lamelle, cortocircuitando una spira:



Infine la spazzola si trova nuovamente su una singola lamella:



Durante la commutazione la corrente che attraversava la matassa che fa capo alle due lamelle (spira rossa) si inverte, e passa (considerando un generico numero di lati attivi a) da $\frac{I}{2a}$ a $-\frac{I}{2a}$. È questa inversione che prende propriamente il nome di “commutazione”. La commutazione ideale sarebbe di tipo lineare. Nella realtà, però, questa è tutt’altro che lineare. La corrente tende a restare costante per gran parte della durata della commutazione, per poi essere “strappata” negli ultimi istanti del fenomeno:



Durante la commutazione esiste una fem indotta che si oppone, pari a

$$\Delta V_{12} = e_{ecc} - L_{cava} \frac{di}{dt} - e_{arm} - Ri$$

Il pedice 12 indica che stiamo tra le lamelle 1 e 2. La fem di eccitazione è circa pari a zero se la commutazione avviene nella zona interpolare. L’induttanza di cava è diversa da zero soltanto durante la commutazione. La fem di armatura è quella dovuta alla reazione di indotto. Ed è pari a:

$$e_{arm} = 2B_{arm}lv$$

Per ridurre lo scintillo durante la commutazione si adottano provvedimenti atti a ridurre e_{ecc} ed e_{arm} , come i poli di commutazione. In presenza di tali poli, l'equazione della tensione tra le lamelle diventa:

$$\Delta V_{12} = 2B_{pc}lv - L_{cava} \frac{di}{dt} - 2B_{arm}lv$$

Esplicitando tutti i termini:

$$B_{arm} = \mu_0 \frac{N}{2p} \frac{I}{2a} \frac{1}{2\delta}$$

$$B_{pc} = \mu_0 \frac{2N_{pc}I}{2\delta_{pc}}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{\left[\frac{I}{2a} - \left(-\frac{I}{2a} \right) \right]}{T_{comm}} = \frac{I}{a T_{comm}} = \frac{I \cdot \overbrace{u_{collettore}}^{vel. angolare}}{a \cdot l_{spazzola}}$$

Otteniamo:

$$\Delta V_{12} = 2\mu_0 \frac{N_{pc}}{\delta_{pc}} Ivl - \frac{2\mu_0 NI}{8pa\delta} lv - \frac{L_{cava} u_{coll} I}{a l_{spazzola}} \approx 0$$

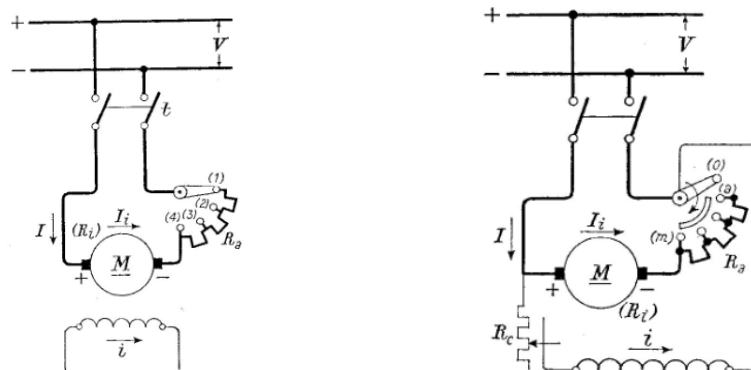
Per cercare di ottenere la condizione $\Delta V_{12} \approx 0$ si può agire sui termini N_{pc} e δ_{pc} .

6.7 FUNZIONAMENTO DA MOTORE

Nel funzionamento da motore, la macchina può avere diversi tipi di collegamento tra rotore ed eccitazione:

1. Eccitazione indipendente
2. Eccitazione derivata
3. Eccitazione serie

I primi due modelli vengono studiati allo stesso modo e sono riportati (in ordine) in figura:



Per ottenere la caratteristica $C-\omega$ si considera che:

$$V = E + R_a I$$

$$E = K_e \Phi \omega_r$$

Da cui

$$I = \frac{V - K_e \Phi \omega_r}{R}$$

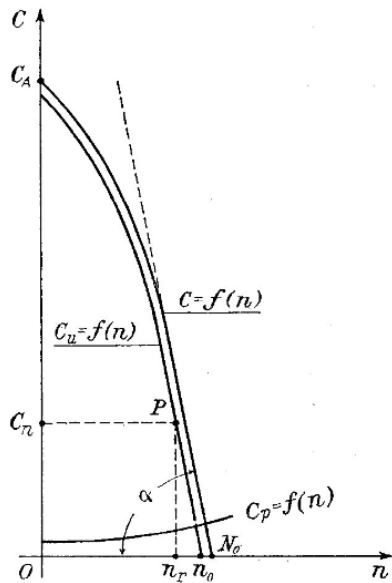
E, dato che

$$C = K_c \Phi I$$

Si ottiene

$$C = K_c \Phi \frac{V - K_e \Phi \omega_r}{R}$$

Questa curva è una retta. Alle basse velocità, tuttavia, la corrente d'armatura è talmente elevata da creare una reazione d'indotto tale da deformare il flusso, con conseguente incurvamento della caratteristica. In figura è riportata la caratteristica meccanica del motore a eccitazione separata. La curva più bassa è la caratteristica utile, ossia la coppia meccanica all'albero che equivale alla coppia elettromagnetica depurata delle perdite per attrito e ventilazione.



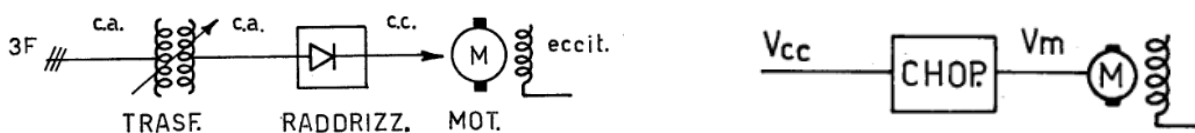
La macchina è caratterizzata da una velocità a vuoto pari

$$\omega_{r_0} = \frac{V}{K_e \Phi}$$

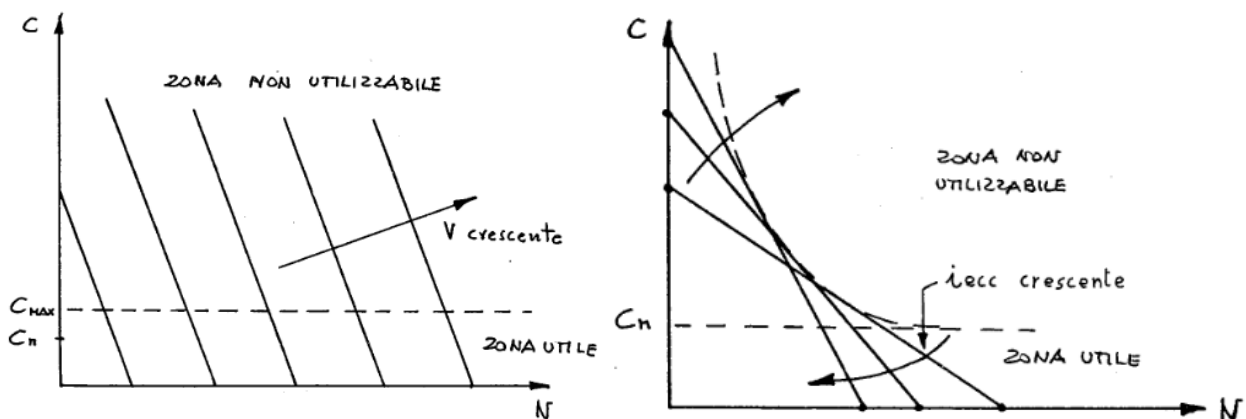
E, se non consideriamo la saturazione del flusso per basse velocità, da una coppia di spunto pari a

$$C_s = K_c \Phi \frac{V}{R}$$

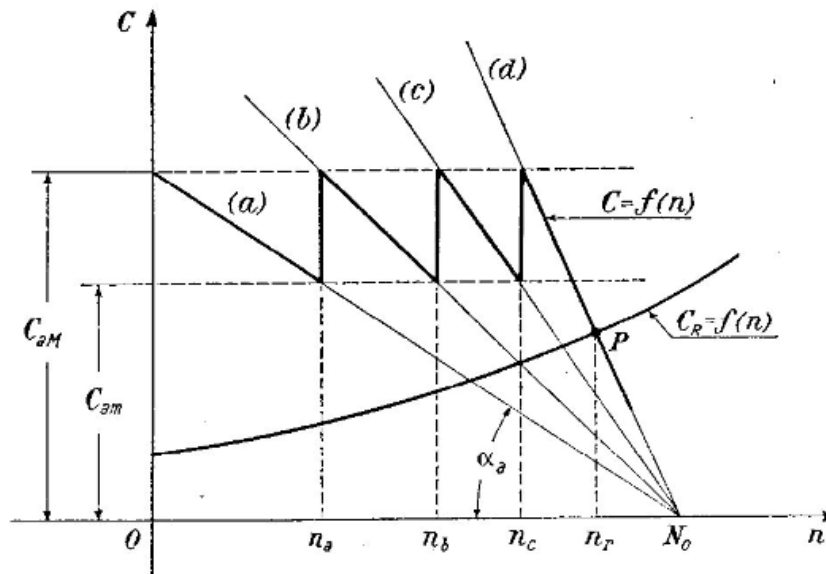
Il controllo della macchina si può effettuare attraverso un azionamento che consenta il controllo della tensione ai morsetti, come un trasformatore a rapporto variabile con un ponte a diodi in cascata, oppure un trasformatore e un ponte a diodi seguiti da un chopper:



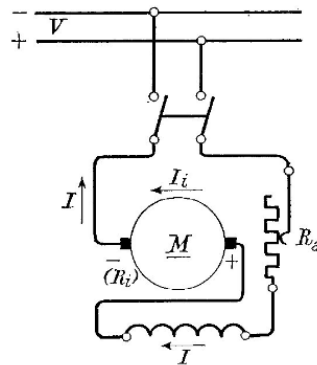
Variando la tensione V (in rapporto massimo 1:10) o il flusso di eccitazione Φ (in rapporto massimo 1:3):



L'avviamento riveste una certa importanza per via delle elevate correnti di spunto. Per avviare la macchina si può facilmente ricorrere ad un reostato in serie con l'armatura, che viene regolato a scatti in modo da ottenere una caratteristica in avviamento come la seguente:



Una macchina con eccitazione serie, è rappresentata in figura:



Analogamente a quanto già fatto si vuole ottenere la caratteristica $C-\omega$ della macchina. Considerando che

$$V = E + RI$$

$$E = K_e \Phi \omega_r$$

$$\Phi = K_\phi I$$

Si ottiene subito che:

$$V = (K_e K_\phi \omega_r + R) I$$

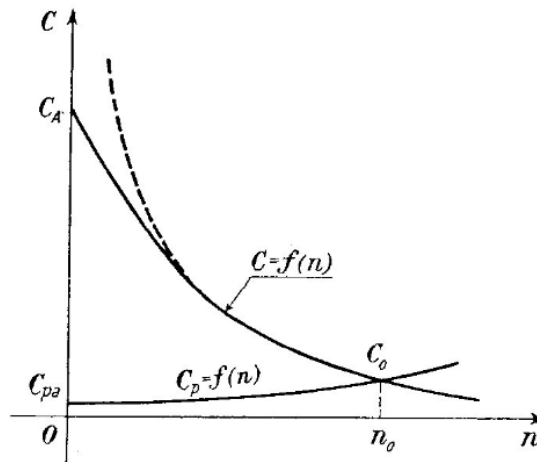
Da cui, considerando anche che

$$C = K_c \Phi I = K_c K_\phi I^2$$

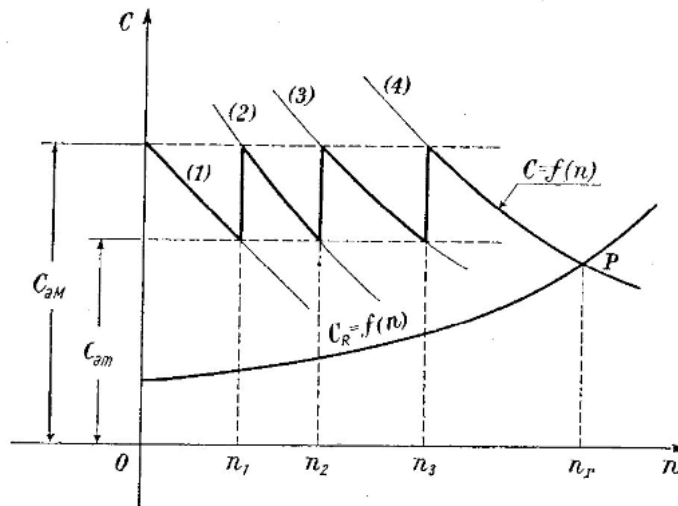
Si ottiene che:

$$C = \frac{K_c K_\varphi V^2}{(K_e K_\varphi \omega_r + R)^2}$$

Questa è l'equazione di un'iperbole equilatera:



È evidente che per coppie resistenti molto piccole la velocità del rotore tende ad essere molto grande. per non compromettere la stabilità meccanica della macchina, quindi, un motore ad eccitazione serie non viene mai fatto girare a vuoto. Per quanto riguarda l'avviamento della macchina, si può sempre ricorrere ad un reostato di avviamento ed ottenere una caratteristica simile a quella già vista nel caso di eccitazione indipendente:



ESERCIZI

ES. 1 – MOTORE ASINCRONO

Si consideri un motore asincrono trifase con gli avvolgimenti statorici collegati a stella dalle seguenti caratteristiche:

Numero di Poli ($2P$)	8
Tensione nominale V_n	380 V
Resistenza statorica R_s	0,2 Ω
Frequenza di alimentazione f	50 Hz

Prova a vuoto

$$V_n = 380 V$$

$$I_0 = 5 A$$

$$P_0 = 1600 W$$

Perdite per attrito e ventilazione: 300 W

Prova a rotore bloccato

$$V_{cc} = 60 V$$

$$I_n = 25 A$$

$$P_{cc} = 2000 W$$

Calcolare:

1. I parametri del circuito monofase equivalente in valore assoluto ed in p.u.;
2. La corrente all'avviamento in valore assoluto ed in p.u.;
3. La coppia di spunto;
4. La coppia massima e la corrente assorbita in tale condizione di funzionamento;
5. La coppia e la velocità nominale,
6. Il rendimento convenzionale in condizioni nominali.

ES. 2 – MOTORE ASINCRONO A DOPPIA GABBIA

Un motore asincrono trifase a 6 poli col rotore a doppia gabbia ha l'avvolgimento statorico connesso a stella e presenta, per ogni fase, una resistenza $R_s = 0,15 \Omega$ e reattanza di dispersione $X_s = 0,8 \Omega$. Ciascuna gabbia del rotore può essere pensata come costituita da un avvolgimento trifase connesso a stella con i seguenti valori di resistenze e induttanze di dispersione:

$$\text{gabbia esterna:} \quad R_{re} = 6R_{ri} \quad L_{dre} = 0,2 \text{ mH}$$

$$\text{gabbia interna:} \quad R_{ri} = 0,05 \Omega \quad L_{dri} = 5L_{dre}$$

il rapporto di trasformazione statore-rotore vale $K = 2$.

La tensione e la frequenza di alimentazione sono $V_n = 380 \text{ V}$ e $f = 50 \text{ Hz}$. La corrente assorbita a vuoto vale $I_0 = 6 \text{ A}$ ed il relativo fattore di potenza $\cos \varphi_0 = 0,1$.

Trascurando le perdite per attrito e ventilazione, ed usando il circuito equivalente semplificato determinare:

1. La corrente, la coppia e il rendimento in condizioni nominali, sapendo che $n_n = 970 \text{ rpm}$;
2. La corrente e la coppia di spunto.

ES. 3 – MOTORE ASINCRONO

Un motore asincrono trifase ad anelli ha le seguenti caratteristiche:

Numero di Poli ($2P$)	4
Tensione nominale V_n	220 V
Velocità nominale	1480 rpm
Frequenza di alimentazione f	50 Hz

In queste condizioni le indicazioni di due wattmetri in inserzione Aron, posti sulla linea di alimentazione del motore, sono: $P_1 = 64 \text{ kW}$, $P_2 = 36 \text{ kW}$.

Sulla macchina sono state eseguite le seguenti prove:

- Prova a vuoto con alimentazione statorica alla tensione e alla frequenza nominale e con avvolgimento rotorico chiuso in corto circuito. $P_{01} = 2200 \text{ W}$; $\cos \varphi_{01} = 0,105$.
- Prova a vuoto con alimentazione statorica alla tensione e alla frequenza nominale e con avvolgimento rotorico aperto. $\cos \varphi_0 = 0,17$; $I_0 = 44 \text{ A}$; $V_{20} = 350 \text{ V}$ (tensione tra le spazzole).
- Prova a vuoto con avvolgimento statorico cortocircuitato ed avvolgimento rotorico alimentato a 350 V e frequenza 50 Hz. $I_{02} = 38 \text{ A}$; $P_{02} - P_{cu02} = 1960 \text{ W}$.

Si sa inoltre che la resistenza statorica tra due morsetti vale: $R_{12,s} = 0,04 \Omega$.

Calcolare:

- La corrente di statore I_1 e la corrente di rotore I_2 nel funzionamento a pieno carico;
- Il rendimento convenzionale;
- La coppia utile;
- La resistenza R_2 di fase dell'avvolgimento rotorico collegato a stella.

ES. 4 – GENERATORE SINCRONO

Un generatore sincrono trifase da 100 kVA , 2300 V , 50 Hz e 6 poli, ha una reattanza sincrona di 64,4 Ω e resistenza degli avvolgimenti trascurabile. Dopo la manovra di parallelo, la corrente di eccitazione è pari a 23 A e la potenza fornita dal motore primo vale 3,75 kW .

Determinare:

1. La corrente di eccitazione richiesta quando il generatore eroga la potenza nominale con fattore di potenza 0,9 in ritardo;
2. La coppia elettromagnetica quando la corrente di statore è 15 A e quella di eccitazione 20 A ;
3. La coppia fornita dal motore primo in suddette condizioni di funzionamento;
4. La potenza meccanica per portare la macchina fuori sincronismo con una corrente di rotore di 20 A ;
5. La corrente di statore in modulo e fase se, subito dopo il parallelo, si vogliono erogare 50 kW .